КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф. Ф. СУЛТАНБЕКОВ

ОТ РЕШЁТОК К БУЛЕВЫМ АЛГЕБРАМ

Учебное пособие

Казань - 2012

УДК 512

Представляется на сайте университета по

решению Редакционно-издательского совета

ФГАОУ ВПО „Казанский (Приволжский) федеральный университетр

учебно-методической комиссии

института математики и механики им. Н. И. Лобачевского

Протокол № 7 от 19 апреля 2012 г.,

заседания кафедры математического анализа

Протокол № 6 от 11 апреля 2012 г.

Рецензент

доктор физ.-мат. наук, доцент **С. Н. Тронин**

Ф. Ф. Султанбеков.

От решёток к булевым алгебрам: Учебное пособие/ Ф. Ф. Султанбеков— Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012 – 74 с.

Данное пособие предназначено для проведения занятий со студентами младших и старших курсов, специализирующихся в области алгебры, функционального анализа и топологии. Форма проведения может быть разной: спецкурс, курс по выбору или факультативный курс. Пособие может быть полезно при подготовке курсовых и дипломных работ. Поскольку приведе-ны доказательства почти всех утверждений оно может быть использовано и для самостоятельного первоначального изучения теории решёток и булевых алгебр.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В этих записях (которые скоро появятся в виде книги) излагается расширенный материал курса по выбору, неоднократно читавшийся автором для студентов Института математики и механики имени Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Часть этого материала также читалась на спецкурсах по квантовым логикам для студентов старших курсов [11]. Хотя предполагается, что читатель знаком с основами общей топологии и функционального анализа (теории меры) в объеме книг [4], [6], [12], почти все утверждения доказываются.

О том, насколько важной является теория решёток, говорит то, что книга Гаррета Биркгофа „Теория решёток“ выдержала три издания в 1940, 1948, и 1967 годах, а переводы её на русский язык были осуществлены дважды – в 1952 и 1984 годах. Как пишет Биркгоф :„Красота теории решёток отчасти объясняется исключительной простотой её основных понятий: упорядочения, точной верхней и точной нижней граней. В этом отношении она очень напоминает теорию групп“. Действительно, решётки и группы являются основными инструментами универсальной алгебры. Теория решёток имеет многочисленные связи с самыми разными разделами математики и других естественных наук - это и демонстрируется в упомянутой книге. К тому же каждая глава заканчивается списком проблем (некоторые из них не решены до сих пор), который привлекает разных читателей и не только математиков.

Как показывает история развития математических теорий, сначала получают результаты для конечных (конечномерных) моделей, а затем выясняют, можно ли их перенести на общий случай. Или сначала рассматривается модель с большим набором дополнительных свойств, а потом переходят к моделям с обедненными свойствами. Как раз так выглядит переход от булевых алгебр к ортомодулярным решёткам и к квантовым логикам. Отказ от закона дистрибутивности привел к новым моделям, носящими в современное время общее название – квантовые структуры. Жемчужина теории булевых алгебр

– теорема Стоуна покорилась лишь для упорядоченных множеств с ортодополнением. Теория меры и интеграла на квантовых структурах также имеет глубокие результаты: достаточно вспомнить знаменитую теорему Глисона об описании мер на проекторах гильбертова пространства и работы Сигала по некоммутативному интегрированию.

Квантовые логики впервые появились в работах Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана как логико-алгебраический подход к основам квантовой механики. Другими важными объектами в квантовой механике являются наблюдаемые и состояния, которым в математических моделях, использующих гильбертовые пространства, соответствуют самосопряженные операторы и меры на проекторах. Отталкиваясь от булевых алгебр (дистрибутивных решеток с дополнениями) они пришли к понятию *модулярной* решетки L в которой для любых $a, b \in L$

$$x \leq b \Rightarrow (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee x$$

Однако для решетки $L(H)$ всех ортопроекторов в гильбертовом пространстве H выделенный выше модулярный закон выполняется тогда и только тогда, когда H конечномерно. Возможно именно этот факт привел к замене модулярного закона более слабым законом *ортомодулярности*:

$$a \leq b \Rightarrow b = a \vee (a^{\theta} \wedge b)$$

(здесь a^{θ} ортодополнение к a). Так появились квантовые логики.

Первая часть записей ($\S 1 - \S 5$) посвящена изложению элементарных основ теории решёток. Здесь рассмотрены различные операции над решётками, описание выпуклых подрешёток, представлен ряд примеров решёток. Далее изучаются модулярные и дистрибутивные решётки. Дано определение свободной решётки в разных классах многообразий решёток, приведены графы (диаграммы) некоторых свободных решёток. Остальные параграфы ($\S 6 - \S 16$)посвящены систематическому изложению теории булевых алгебр. Одним из основных понятий в этой теории является понятие идеала (максимального идеала).Значительное внимание уделено также полным булевым алгебрам (теорема Стоуна-Огасавары, теорема о полноте булевой алгебры компонент, полнота булевых алгебр регулярных множеств топологического пространства). Заключительные параграфы посвящены гомоморфизмам, автоморфизмам и мерам на булевых алгебрах.

Изложение материала ориентировано на активное изучение – предлагается 40 задач, которые помещены в конце параграфов, где по мнению автора, читатель мог бы применить уже освоенные знания. Номер задачи помечен кружочком $^\circ$. Если у читателя проснется дополнительный интерес:

1) к булевым алгебрам, то пусть посмотрит [2], [5], [10];

2) к решеткам, то пусть посмотрит [1], [3], [8], [9];

3) к квантовым логикам, то пусть посмотрит [11], [13], [14], [15].

Если же у читателя проснется дополнительный к дополнительному интерес, то пусть обратится к Интернет или к автору этих строк.

Любой математический текст, не использующий абревиатур наиболее часто встречающихся понятий, вызывает, на наш взгляд, некоторое "раздражение". Вообще то, это веление времени (например, любая даже пользовательская литература по программам для компьютеров не может обходится без сокращений). Поэтому мы позволили себе ввести следующие сокращения: у.м – упорядоченное множество, б.а – булева алгебра, $\square$ - конец доказательства.

Записи рассчитаны на студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в области, алгебры, функционального анализа и топологии. Они могут быть использованы при проведении спецкурсов, курсов по выбору и факультативных семинаров.

§1. Отношения. Упорядоченные множества

1.1. *Отношением* в множестве X называется любое подмножество $\alpha \subseteq X \times X$. В множестве всех отношений RX помимо теоретико-множественных операций $\cup, \cap, ^{c}, \subseteq, \setminus$ рассматриваются еще *композиция* отношений и *обратное* отношение, определенные равенствами

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) : \exists\, z \in X((x, z) \in \alpha; (z, y) \in \beta)\},$$

$$\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\}.$$

Определим также множество $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$, называемое *диагональю.*

1.2. Отметим легко проверяемые свойства этих операций:

a) $\Delta \circ \alpha = \alpha \circ \Delta = \alpha$; b) $\alpha \subseteq \beta,\ \gamma \subseteq \delta \Rightarrow \alpha \circ \gamma \subseteq \beta \circ \delta,\ \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$;

c) $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$; d) $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$;

e) $(\cup \alpha_i)^{-1} = \cup \alpha_i^{-1}$, $(\cap \alpha_i)^{-1} = \cap \alpha_i^{-1}$.

1.3. Отношение α называется *рефлексивным*, если $\Delta \subseteq \alpha$; *симметричным*, если $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$; *антисимметричным*, если $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta$; *транзитивным*, если $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$; *иерархичным*, если $\alpha \circ \alpha^{-1} = X \times X$.

Пусть α рефлексивно и транзитивно. Отношение α называется:
порядком, если оно антисимметрично; *эквивалентностью*, если оно симметрично; *направлением*, если оно иерархично.

Обозначим через OX (соотв. EX и NX) множество всех порядков в X (соотв. всех эквивалентностей и всех направлений в X). Заметим, что с учетом 1.2 все включения (кроме рефлексивности) в определениях порядка, эквивалентности и направления превращаются в равенства. Таким образом, $\alpha \in OX \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha^{-1} = \Delta \subseteq \alpha = \alpha \circ \alpha$, $\alpha \in EX \Leftrightarrow \Delta \subseteq \alpha = \alpha^{-1} = \alpha \circ \alpha$, $\alpha \in NX \Leftrightarrow \Delta \subseteq \alpha = \alpha \circ \alpha$ и $\alpha \circ \alpha^{-1} = X \times X$.

Пара (X, α), где α порядок в X называется *упорядоченным множеством* (у.м). Часто, когда ясно о каком порядке идет речь, и само X называют упорядоченным множеством.

1.4. Далее мы будем использовать также традиционную запись сравнения двух элементов у.м (X, α): "$(x, y) \in \alpha \equiv x \leq y \equiv y \geq x$". При этом $x <$

y, если $x \leq y$ и $x \neq y$. Часть $X_0 \subset X$ называется *цепью*, если любые два элемента X_0 сравнимы. В частности, конечными цепями являются у.м $\mathcal{C}_n = \{c_1, c_2, ...c_n\}$ в которых $c_1 < c_2 < ... < c_n$. Элемент z упорядоченного множества X называется *максимальным* (соотв. *минимальным*), если $z \leq x \Rightarrow x = z$ (соотв. $x \leq z \Rightarrow x = z$). Часть X_0 *ограничена сверху*, если $\exists y \in X \forall x \in X_0 (x \leq y)$. При этом y называется *верхней границей* для X_0. В дальнейшем будет использоваться, эквивалентная аксиоме выбора,

Лемма Цорна. *Пусть в упорядоченном множестве X любая цепь ограничена сверху. Тогда X имеет максимальный элемент.*

1.5. Два у.м $(X_1, \leq_1)$, $(X_2, \leq_2)$ *изоморфны* (соотв. *антиизоморфны*), если существует биекция $\varphi : X_1 \to X_2$ такая, что $\forall x, y \in X_1 (x \leq_1 y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y))$ (соотв. $x \leq_1 y \Leftrightarrow \varphi(x) \geq_2 \varphi(y)$). Ясно, что при изоморфизме максимальные (соотв. минимальные) элементы переходят в максимальные (соотв. минимальные). При антиизоморфизме максимальные элементы переходят в минимальные и наоборот.

1.6. Пусть X – у.м и $E \subset X$. Через E^s (соотв. E^i) совокупность всех верхних границ (соотв. всех нижних границ) множества E. Очевидно, что $E \cap E^s$ не более, чем одноэлементно и если $E \cap E^s \neq \emptyset$, то элемент из этого пересечения называется *наибольшим*. Аналогично определяется *наименьший* элемент. Точно также элемент из множества $E^s \cap E^{si}$, если $E^s \cap E^{si} \neq \emptyset$ называется *точной верхней границей* множества E и обозначается $\sup E$. Соответственно элемент из $E^i \cap E^{is}$, если он существует, называется *точной нижней границей* множества E и обозначается $\inf E$. Таким образом, $\sup E$ это наименьшая из верхних границ для множества E, а $\inf E$ это наибольшая из нижних границ для E. Для конечного множества $E = \{x_1, ..., x_n\}$ используется обозначение $\sup E = \bigvee\limits_{k=1}^{n} x_k$ и $\inf E = \bigwedge\limits_{k=1}^{n} x_k$. В частности $\sup\{x, y\} = x \vee y$ и $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. В дальнейшем при использовании точных границ мы всегда предполагаем их существование.

1.7 Приведём некоторые свойства границ:

a) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow E_2^i \subseteq E_1^i$; $E_2^s \subseteq E_1^s$; $\sup E_1 \leq \sup E_2$, $\inf E_2 \leq \inf E_1$.
b) Следующие три утверждения равносильны: $x \leq y$; $x = x \wedge y$; $y = x \vee y$.
c) $x_k \leq y_k (k = 1, ..., n) \Rightarrow \bigvee_{k=1}^{n} x_k \leq \bigvee_{k=1}^{n} y_k$; $\bigwedge_{k=1}^{n} x_k \leq \bigwedge_{k=1}^{n} y_k$ (сохранение порядка точными границами).
d) Пусть $\mathcal{E}$ – семейство подмножеств у.м X и $F = \cup\{E : E \in \mathcal{E}\}$. Тогда $\sup F = \vee\{\sup E : E \in \mathcal{E}\}$; $\inf F = \wedge\{\inf E : E \in \mathcal{E}\}$ (ассоциативность точных границ).

Доказательство d). Обозначим $y_E = \sup E, y = \bigvee_{E \in \mathcal{E}} y_E$. Если $x \in F$, то существует $E \in \mathcal{E}$ такое, что $x \in E$. Значит $x \leq y_E \leq y, y \in F^s$. Пусть $z \in F^s$. Так как $E \subset F$, то по a) $F^s \subset E^s$ и $z \in E^s$ для любого $E \in \mathcal{E}$. Значит $z \geq y_E (E \in \mathcal{E})$. Поэтому $z \geq y$ и, следовательно, $y = \sup F$. Доказательство для $\inf F$ аналогично.$\square$

1.8. Приведём некоторые свойства изоморфизмов и антиизоморфизмов. Пусть φ – изоморфизм, а ψ – антиизоморфизм. Тогда:
i) $\varphi(E^s) = \varphi(E)^s$; $\varphi(E^i) = \varphi(E)^i$.
ii) $\varphi(\sup E) = \sup \varphi(E)$; $\varphi(\inf E) = \inf \varphi(E)$.
iii) $\psi(E^s) = \psi(E)^i$; $\psi(E^i) = \psi(E)^s$.
iv) $\psi(\sup E) = \inf \psi(E)$; $\psi(\inf E) = \sup \psi(E)$.

Доказательство i). Пусть $z \in E^s$. Это означает $x \leq z$ для любого $x \in E$‘. Тогда $\varphi(x) \leq \varphi(z)$ и значит $\varphi(z) \in \varphi(E)^s$. Итак, $\varphi(E^s) \subset \varphi(E)^s$. Обратно, если $\forall x \in E (\varphi(x) \leq y)$, то $\varphi(x) \leq \varphi(\varphi^{-1}(y))$. Поэтому $x \leq \varphi^{-1}(y)$ и $\varphi^{-1}(y) \in E^s, y = \varphi(\varphi^{-1}(y)) \in \varphi(E^s)$. Таким образом, $\varphi(E)^s \subset \varphi(E^s)$.

ii) Пусть $z = \sup E \in E^s \cap E^{si}$. Так как любая биекция сохраняет пересечения, то $\varphi(z) \in \varphi(E^s) \cap \varphi(E^{si})$. В силу i) $\varphi(z) \in \varphi(E)^s \cap \varphi(E)^{si}$ и, следовательно, $\varphi(z) = \sup \varphi(E)$. Доказательства для антиизоморфизмов аналогичны.$\square$

1.9. Принцип двойственности.*Если в у.м справедливо утверждение, использующее порядок $\leq$ и операции $\vee, \wedge$, то справедливо и двойственное утверждение, полученное заменой порядка $\leq$ на порядок $\geq$ и операций $\vee, \wedge$ на операции $\wedge, \vee$.*

Доказательство немедленно следует из 1.8.

1° Пусть $\alpha, \beta \in EX$. Тогда $\alpha \circ \beta \in EX \Leftrightarrow \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$; $\alpha \cup \beta \in EX \Leftrightarrow (\alpha \circ \beta) \cup (\beta \circ \alpha) = \alpha \cup \beta$.

2° Пусть $\alpha, \beta \in OX$. Тогда $\alpha \cup \beta \in OX \Leftrightarrow (\alpha \circ \beta) \cup (\beta \circ \alpha) = \alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^{-1} = \Delta$.

3° Пусть $\alpha, \beta \in NX$. Если $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, то $\alpha \circ \beta \in NX$

4° Пусть $\alpha, \beta \in NX$. Тогда $\alpha \cup \beta \in NX \Leftrightarrow (\alpha \circ \beta) \cup (\beta \circ \alpha) = \alpha \cup \beta$.

5° Покажите, что множества OX, EX замкнуты относительно произвольных пересечений. При каких условиях на $\alpha, \beta \in NX$ будет $\alpha \cap \beta \in NX$?

§2. Решётки

2.1. У.м L называется *решёткой*, если $\forall x, y \in L(x \vee y \in L,\ x \wedge y \in L)$. Решётка L называется *полной*, если $\forall E \subset L(\sup E \in L,\ \inf E \in L)$.

Наряду с приведенным *порядковым* определением решётки дадим также *алгебраическое* определение решётки. Алгебраическая система L с двумя бинарными операциями $\vee, \wedge$ такая, что $\forall a, b \in L$ выполнены требования

a1) операции $\vee, \wedge$ коммутативны и ассоциативны,

a2) $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ (законы поглощения);

называется *решёткой*.

2.2. Теорема. *Алгебраическое и порядковое определения решётки эквивалентны.*

Доказательство. Пусть L порядковая решётка. Тогда положив $a \vee b = \sup\{a, b\}$; $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, получаем алгебраические операции, удовлетворяющие требованиям a1), a2).

Обратно, пусть L алгебраическая решётка. Из законов поглощения следует, что $a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a \wedge a$; $a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a \vee a$ то есть операции $\vee, \wedge$ идемпотентны.

Теперь определим порядок в $L : a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$. Действительно, отношение $\leq$ рефлексивно в силу идемпотентности $\wedge$. Оно антисимметрично в силу коммутативности $\wedge$. Наконец, в силу ассоциативности $\wedge$, отношение $\leq$ транзитивно: $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a = a \wedge b, b = b \wedge c \Rightarrow a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$.

Покажем, что $a \leq b \Leftrightarrow b = a \vee b$. Действительно, $a = a \wedge b$ влечет $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ в силу второй аксиомы поглощения. Обратно, $b = a \vee b$ влечет $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$ в силу первой аксиомы поглощения.

Наконец установим, что точные границы в смысле выше введенного порядка совпадают с алгебраическими.

Пусть $z = \inf\{a, b\}$. Тогда из $z \leq a, z \leq b$ следует, что $z = z \wedge a, z = z \wedge b; z = a \wedge b \wedge z$. Следовательно, $z \leq a \wedge b$. С другой стороны, $a \wedge b = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge (a \wedge b)$, то есть $a \wedge b \leq a$. Аналогично $a \wedge b \leq b$. Так как z – наибольшая из нижних границ для a, b, то $a \wedge b \leq z$. Итак, $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.

Пусть $u = \sup\{a, b\}$. Тогда $u \geq a, u \geq b$ влечет $u = a \vee u, u = b \vee u$. Поэтому $u = u \vee u = (a \vee u) \vee (b \vee u) = (a \vee b) \vee u$ и $u \geq a \vee b$. С другой стороны, в силу первой аксиомы поглощения $a \vee b \geq a, a \vee b \geq b$. Поэтому $u \leq a \vee b$ как наименьшая из верхних границ для $\{a, b\}$. Итак, $\sup\{a, b\} = a \vee b$. $\square$

2.3. Замечание. Алгебраическое определение решётки в 2.1 использует шесть тождеств: четыре для коммутативности и ассоциативности для операций $\vee$ и $\wedge$ плюс два тождества поглощения. Число тождеств (конечно, за счет увеличения числа переменных в них входящих), задающих решётку можно уменьшить: до двух (найдено Падманабханом в 1967 г.), до одного (найдено Маккензи в 1970 г.)

2.4. Пусть X, Y – решётки и $\varphi : X \to Y$ изоморфизм у.м. Тогда в силу 1.8. для любых $x_1, x_2 \in X$

$$\varphi(x_1 \vee x_2) = \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2); \;\; \varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2). \qquad (*)$$

Обратно, если φ биекция X на Y, удовлетворяющая одному из условий $(*)$, то φ есть изоморфизм X и Y как упорядоченных множеств. Пусть, например, выполнено первое равенство из $(*)$. Тогда $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \vee x_2 \Leftrightarrow$

$\varphi(x_2) = \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. Это говорит о том, что определения порядкового и алгебраического изоморфизма решёток совпадают.

2.5. Часть V решётки L называется *подрешёткой* решётки L, если $x, y \in V \Rightarrow x \vee y \in V, x \wedge y \in V$. Ясно, что пересечение любого семейства подрешёток, снова подрешётка. Поэтому существует наименьшая подрешётка $L(A)$, содержащая A, для любого подмножества $A \subseteq L$; при этом элементы из множества A называются *образующими*. Далее, пусть $L_t, t \in T$ – семейство решёток. В декартовом произведении $L = \prod\limits_{t \in T} L_t$ введем (покоординатные) алгебраические операции:

$$(x_t) \vee (y_t) = (x_t \vee y_t), \ \ (x_t) \wedge (y_t) = (x_t \wedge y_t).$$

Тогда по теореме 2.2 L является решёткой, в которой $(x_t) \leq (y_t) \Leftrightarrow \forall t \in T(x_t \leq y_t)$. Эта решётка называется *прямым произведением* решёток L_t.

2.6. Часть I решётки L называется *идеалом*, если

$$\text{i) } x \in I, L \ni y \leq x \Rightarrow y \in I \quad \text{ii) } x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I.$$

Из определения следует, что любой идеал I является подрешёткой решётки L; более того, эта подрешётка *выпукла*: $\forall a, b \in I, c \in L(a \leq c \leq b \Rightarrow c \in I)$. Нетрудно также видеть, что два утверждения i), ii) можно объединить в одно:

$$I \text{ – идеал } \Leftrightarrow \forall x, y \in L(x \vee y \in I \Leftrightarrow x \in I, y \in I).$$

Ясно, что пересечение любого семейства идеалов, снова идеал. Поэтому существует наименьший идеал $I(H)$, содержащий H, для любого подмножества $H \subseteq L$. Например, $I(a) = I(\{a\}) = \{x \in L : x \leq a\} = \{x \wedge a : x \in L\}$; такой идеал называется *главным*. Идеал, отличный от L, называется *собственным*. Собственный идеал I называется *простым*, если $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$.

Покажем, что $I(H) = \{x \in L : \exists\, n \geq 1 \ \exists\, h_1, ..., h_n \in H(x \leq h_1 \vee ... \vee h_n)\}$. Действительно, множество $I = \{x \in L : \exists\, n \geq 1 \ \exists\, h_1, ..., h_n \in H(x \leq h_1 \vee ... \vee h_n)\} \supset H$ и удовлетворяет условиям i) и ii), то есть является идеалом. Если же J есть идеал, содержащий H, то $I \subset J$ в силу того, что $h_1 \vee ... \vee h_n \in J$. Следовательно, $I = I(H)$.

2.7. Теорема. *Множество $\mathcal{J}(L)$ всех идеалов решётки L, упорядоченное* *по включению, является полной решёткой с наибольшим элементом L. При этом решётка L вкладывается в $\mathcal{J}(L)$ с помощью отображения $L \ni x \mapsto I(x) \in \mathcal{J}(L)$.*

Доказательство. Пусть $I_\lambda, \lambda \in \Lambda$ – семейство идеалов. Тогда

$$\inf\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \cap\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\},\ \sup\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = I(\cup\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$$

Далее отметим, что $I(x) \wedge I(y) = I(x \wedge y)\ \ I(x) \vee I(y) = I(x \vee y)$. Поскольку $x \neq y$ влечет $I(x) \neq I(y)$, то отображение $L \ni x \mapsto I(x) \in \mathcal{J}(L)$ есть инъективный гомоморфизм, то есть вложение. □

2.8. Двойственным к идеалу понятием является понятие фильтра (или ко-идеала). Часть F решётки L называется *фильтром*, если

$$\text{j)}\ a \in F, a \leq b \in L \Rightarrow b \in F \quad \text{jj)}\ a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F.$$

Из определения следует, что любой фильтр F является выпуклой подрешёткой решётки L. Как и выше два утверждения j), jj) можно объединить в одно:

$$F \text{ – фильтр} \Leftrightarrow \forall a, b \in L (a \wedge b \in F \Leftrightarrow a \in F, b \in F).$$

Также существует наименьший фильтр $F(H)$, содержащий H, для любого подмножества $H \subseteq L$. Фильтр $F(a) = F(\{a\}) = \{x \in L : x \geq a\} = \{x \vee a : x \in L\}$ называется *главным.* Фильтр, отличный от L, называется *собственным.* Собственный фильтр F называется *ультрафильтром*, если $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ или $b \in F$. Отметим, что $F(a) \wedge F(b) = F(a \vee b),\ F(a) \vee F(b) = F(a \wedge b)$.

Через $\mathcal{F}(L)$ обозначим множество всех фильтров решётки L. Тогда $\mathcal{F}(L)$, упорядоченное по включению, является полной решеткой с наибольшим элементом L.

2.9. Теорема. *Пусть I – идеал, F – фильтр. Если $I \cap F \neq \emptyset$, то $I \cap F$ – выпуклая подрешётка. Любая выпуклая подрешётка единственным образом представима в таком виде.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть H– выпуклая подрешётка решётки L. Положим $I = I(H),\ F = F(H)$. Тогда $H \subset I \cap F$. Далее, так как H подрешетка, то описание идеала, порожденного множеством H в 2.6 упростится, а именно $I(H) = \{x \in X : \exists h \in H(x \leq h)\}$. Двойственным образом, $F(H) = \{x \in X : \exists h \in H(x \geq h)\}$. Следовательно, $x \in I \cap F$ влечет существование таких элементов $h_1, h_2 \in H$, для которых $h_1 \leq x \leq h_2$. Так как H выпукло, то $x \in H$. Итак, $H = I \cap F$.

Установим единственность этого разложения. Предположим, что $H = I_1 \cap F_1$. Тогда $H \subset I_1$ и значит $I(H) \subset I_1$. Пусть $x \in I_1, h \in H$. Так как $h \in I_1$, то $I_1 \ni x \vee h \geq h \in F_1$, и $x \vee h \in F_1$. Итак, $x \vee h \in I_1 \cap F_1 = H$. Поэтому $x \leq x \vee h \in H$ влечет $x \in I(H)$. Тем самым мы показали, что $I_1 = I(H)$. Двойственным образом показываем, что $F_1 = F(H)$. $\square$

2.10. *Нулем* 0 и *единицей* 1 у.м X называются наименьший и наибольший элементы X, если таковые существуют. Ясно, что в конечной решетке $L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $0 = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$, $1 = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$. Конечную решётку можно задать с помощью таблиц для операций $\vee, \wedge$ (алгебраический способ). Другой способ (порядковый) основан на следующем понятии. Скажем, что b *покрывает* a, если $a < b$ и $\not\exists x \ (a < x < b)$. Тогда решётку можно представить в виде графа $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, вершинами $\mathcal{V}$ которого являются элементы решётки, а рёбрами $\mathcal{E}$ все те пары (a, b) в которых b покрывает a. При этом на диаграмме вершина b располагается *выше* вершины a (тем самым получается *ориентируемый* граф; о графах подробнее см. [7]). В конечных у.м отношение покрываемости полностью определяет порядок: $a \leq b$ тогда и только тогда, когда из a можно, поднимаясь строго верх по каждому ребру графа, добраться до элемента b.

Приведём примеры простейших конечных решёток. Для краткости ребро (a, b) входящее в $\mathcal{E}$ будем обозначать ab.

Диамант $\mathcal{M}_3$ имеет множество вершин $\mathcal{V} = \{0, x, y, z, 1\}$ и множество рёбер $\mathcal{E} = \{0x, 0y, 0z, x1, y1, z1\}$.*Пентагон* $\mathcal{N}_5$ имеет множество вершин $\mathcal{V} = \{0, a, b, c, 1\}$ и множество рёбер $\mathcal{E} = \{0a, 0c, ab, b1, c1\}$. Решётка $(\mathcal{C}_2)^3$ - это решётка всех подмножеств 3-элементного множества, упорядоченная по включению. Такое обозначение выбрано в силу того, что она изморфна прямому произведению трех экземпляров решётки $\mathcal{C}_2 = \{0, 1\}$.

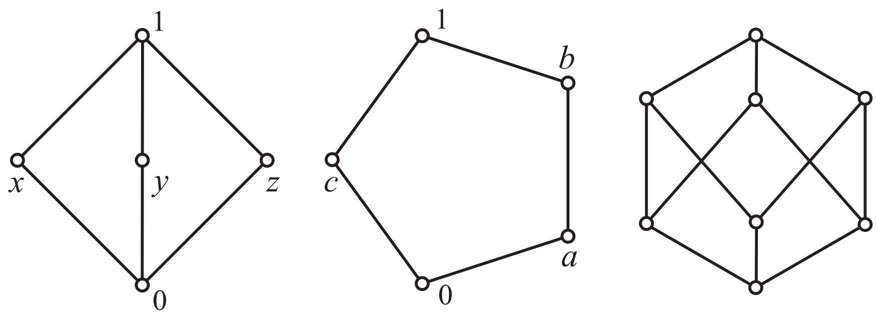

Рис. 1: Диамант (слева), пентагон и решётка $(\mathcal{C}_2)^3$

6°. Пусть x максимальный, z минимальный элемент в решётке L. Тогда $x = 1$, а $z = 0$.

7°. Покажите, что в решётке L условие $\forall E \subset L(\sup E \in L)$ равносильно условию $\forall E \subset L(\inf E \in L)$.

8°. Показать, что $(EX, \subseteq)$ есть полная решётка с $0 = \Delta, 1 = X \times X$.

9°. Пусть X – множество, $\mathcal{P}(X)$ – семейство всех подмножеств множества X, TX – множество всех топологий в X. Показать, что $(TX, \subseteq)$ есть полная решётка с $0 = \{\emptyset, X\}, 1 = \mathcal{P}(X)$.

10°. Пусть $L < a, b >$ – множество всех промежутков отрезка $[a, b]$. Показать, что $(L < a, b >, \subseteq)$ есть полная решётка с $0 = \emptyset$, 1$=$ $[a, b]$ (эта решётка называется *решеткой промежутков*).

11°. Показать, что $(OX, \subseteq)$ есть $\wedge$-полное у.м с $0 = \Delta$, не являющееся решёткой.

12°. Непустое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется *фильтром множеств*, если

f1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$; f2) $F \in \mathcal{F}, F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$; f3) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$.

Пусть FX – семейство всех фильтров множеств в X. Показать, что $(FX, \subseteq)$ есть $\wedge$-полное у.м с $0 = \{X\}$, не являющееся решёткой.

13°. Доказать, что алгебра $(L, \vee, \wedge)$ является решёткой тогда и только тогда, когда в ней выполнены два тождества

$$a = (b \wedge a) \vee a,$$

$$(((a \wedge b) \wedge c) \vee d) \vee e = (((b \wedge c) \wedge a) \vee e) \vee ((f \vee d) \wedge d).$$

§3. Модулярные решётки

3.1. Решётка L называется *модулярной*, если $\forall x, y, z \in L$

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \qquad \text{M1}$$

Заметим, что аксиома M1 является самодвойственной: если написать двойственное утверждение, то получим ту же самую аксиому. Аксиома M1 равносильна следующей аксиоме: $\forall a, b, c \in L$

$$a \vee ((a \vee b) \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad \text{M2}$$

Действительно, из M1 следует M2; достаточно положить $x = a, z = a \vee b, y = c$. Если же $x \leq z$, то взяв в M2 $a = x, b = z, c = y$, получим $x \vee ((x \vee z) \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge (x \vee y) = z \wedge (x \vee y)$. Аналогично показывается, что M1 равносильна аксиоме: $\forall a, b, c \in L$

$$a \wedge ((a \wedge b) \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \text{M3}$$

Модулярны решётка $\mathcal{M}_3$ и решётка $(\mathcal{C}_2)^3$; пентагон $\mathcal{N}_5$ не модулярен.

3.2. Теорема. *Решётка L модулярна тогда и только тогда, когда она не содержит подрешётки, изоморфной $\mathcal{N}_5$.*

Доказательство. Если L не модулярна, то найдутся $x, y, z \in L, x \leq z$ такие,что $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$. Тогда элементы $\{y \wedge z,\ y,\ x \vee (y \wedge z),\ (x \vee y) \wedge z,\ x \vee y\}$ образуют подрешётку в L, изоморфную $\mathcal{N}_5$ (см. рис. 2).

Действительно, $y \wedge z < x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z < x \vee y, y \wedge z < y < x \vee y$, так как предположение хотя бы одного равенства в приведенных соотношениях приводит к противоречию. Например, если $y \wedge z = x \vee (y \wedge z)$, то $x \leq y \wedge z$, откуда $(x \vee y) \wedge z = y \wedge z = x \vee (y \wedge z)$. Противоречие. Наконец, $y \vee (x \vee (y \wedge z)) = (x \vee y) \vee (y \wedge z) = x \vee y$. $\square$

3.3. Теорема об изоморфизме. *Пусть a, b – элементы модулярной решётки L. Тогда отображение $\varphi_b : x \mapsto x \wedge b$ является изоморфизмом отрезка $[a, a \vee b]$ на отрезок $[a \wedge b, b]$. При этом обратным изоморфизмом является отображение $\psi_a : x \mapsto x \vee a$.*

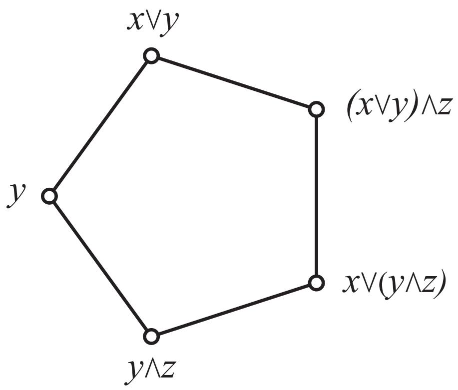

Рис. 2: Решётка, изоморфная $\mathcal{N}_5$

Доказательство. Достаточно установить, что $\psi_a(\varphi_b(x)) = x$ для всех $x \in [a, a \vee b]$. Действительно, тогда в силу принципа двойственности $\varphi_b(\psi_a(x)) = x$ для всех $x \in [a \wedge b, b]$. Таким образом, композиции неубывающих отображений φ_b, ψ_a являются тождественными отображениями. Следовательно, φ_b, ψ_a – изоморфизмы. Итак, пусть $x \in [a, a \vee b]$. Тогда $\psi_a(\varphi_b(x)) = (x \wedge b) \vee a$. Так как $a \leq x$, то применяя M1, получаем

$$\psi_a(\varphi_b(x)) = a \vee (b \wedge x) = (a \vee b) \wedge x = x,$$

поскольку $x \leq a \vee b$.$\square$

3.4. Следствие *Пусть a, b – элементы модулярной решётки L. Тогда для любых $x, y \in [a \wedge b, b]$* выполняется равенство $a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$.

Действительно, это равенство означает сохранение точных нижних граней для отображения ψ_a. $\square$

3.5. Теорема. *Решётка нормальных подгрупп произвольной группы модулярна.*

Доказательство. Напомним, что подгруппа M группы G называется *нормальной*, если $\forall x \in G(xM = Mx)$, где $xM = \{xm : m \in M\}$. Семейство всех нормальных подгрупп группы G становится решёткой по включению с $0 = \{e\}$ и $1 = G$, причем $M \wedge N = M \cap N, M \vee N = MN = NM$. Аксиома M2 в рассматриваемом случае выглядит так: для любых нормальных подгрупп M, N, P группы G справедливо равенство $MN \cap MP = M(MN \cap P)$.

Пусть $a \in MN \cap MP, a = x_1 y = x_2 z$, где $x_1, x_2 \in M, y \in N, z \in P$. Тогда $z = x_2^{-1} x_1 y \in MN \cap P$ и $a = x_2(x_2^{-1} x_1 y) \in M(MN \cap P)$. Значит $MN \cap MP \subset M(MN \cap P)$. Пусть $a \in M(MN \cap P), a = xh, x \in M h \in MN \cap P$. Тогда $h \in P$ и $a \in MP$. Так как $h \in MN$, то $h = x_1 y_1, x_1 \in M, y_1 \in N$ и значит $a = x x_1 y_1 \in MN$. Следовательно, $a \in MN \cap MP, M(MN \cap P) \subset MN \cap MP$. □

3.6. Следствие. *Решётка подпространств вещественного конечномерного векторного пространства модулярна.*

Доказательство. Вещественное конечномерное векторное пространство является коммутативной группой по сложению. Следовательно, любая ее подгруппа нормальна. Но каждая ее подгруппа является подпространством (и, очевидно, наоборот). По теореме 3.5 получаем утверждение следствия. □

14°. Решётка L модулярна тогда и только тогда, когда L удовлетворяет тождеству $x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z)$ для любых $x, y, z \in L$.
15°. Показать, что решётка L модулярна тогда и только тогда, когда $x \wedge (y \vee z) \leq y \vee ((x \vee y) \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$.
16°. Доказать, что решётка L модулярна тогда и только тогда, когда $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$.

§4. Дистрибутивные решётки

4.1. Решётка L называется *дистрибутивной*, если $\forall x, y, z \in L$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z). \tag{D1}$$

Покажем, что аксиома дистрибутивности D1 равносильна следующей аксиоме: $\forall x, y, z \in L$

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z). \tag{D2}$$

D1 $\Rightarrow$ D2: Используя D1 и второй закон поглощения имеем $(x \vee z) \wedge (y \vee z) = [(x \vee z) \wedge y] \vee [(x \vee z) \wedge z] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee z = (x \wedge y) \vee z$.

D2 $\Rightarrow$ D1: Используя D2 и первый закон поглощения имеем $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = [x \vee (y \wedge z)] \wedge [z \vee (y \wedge z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (z \vee y) \wedge z = (x \vee y) \wedge z$.

4.2. Приведем характеризацию дистрибутивности в терминах неравенств. Решётка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда $\forall x, y, z \in L$

$$(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z) \tag{iN}$$

Действительно, применяя D2, имеем $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq (x \vee y) \wedge z$, так как $x \vee z \geq z$. Значит D2 влечет (iN). Обратно, пусть неравенство (iN)истинно на L. Применим его дважды: для $x = a, y = b, z = a \vee c$ и получим $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge (a \vee c))$. Затем для $x = a, y = c, z = b$ и получим $(a \vee c) \wedge b \leq a \vee (c \wedge b)$. Таким образом справедливо неравенство

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (a \vee (c \wedge b)) = a \vee (c \wedge b)$$

Обратное неравенство $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (c \wedge b)$ очевидно. Следовательно,(iN) влечет D2.$\square$

4.3. Теорема. *Решётка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда* $\forall x, y, z \in X$

$$x \vee y = x \vee z,\ x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow y = z. \tag{$**$}$$

*Доказательство.*Необходимость. Применяя D1, получим $y = y \wedge (x \vee y) = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z = (x \vee z) \wedge z = z$.

Достаточность. Покажем, что решётка L модулярна. Предположим противное. Тогда в L найдутся x, y, z такие, что $x \leq y$ и $u = x \vee (z \wedge y) < (x \vee z) \vee y = v$. Отсюда следует, что $x \leq u < v \leq y, z \wedge v \leq z \wedge y \leq u$. Поэтому $z \wedge v \leq z \wedge u$. Но так как $u \leq v$, то $z \wedge u \leq z \wedge v$. Итак, $z \wedge u = z \wedge v$. Далее $z \vee u \geq z \vee x \geq v$, поэтому $z \vee u \geq z \vee v$. Снова $u \leq v$ влечет $z \vee u \leq z \vee v$. Значит $z \vee u = z \vee v$. В силу $(**)$ $u = v$, противоречие.

Рассмотрим элементы $u_1 = a_2 \vee a_3$, $u_2 = a_1 \vee a_3$, $u_3 = a_1 \vee a_2$, а также элементы $v_1 = a_2 \wedge a_3$, $v_2 = a_1 \wedge a_3$, $v_3 = a_1 \wedge a_2$. Так как $u_i \leq v_i$, то в силу модулярности M1 имеем $(u_i \vee a_i) \wedge v_i = u_i \vee (a_i) \wedge v_i) = b_i (i = 1, 2, 3)$. Положим $u = u_1 \vee u_2 \vee u_3, v = v_1 \vee v_2 \vee v_3$. Так как $a_2 \wedge v_2 \leq v_1$, то в силу M1

$((a_2 \wedge v_2) \vee a_1) \wedge v_1 = (a_2 \wedge v_2) \vee (a_1) \wedge v_1)$. Так как $a_1 \leq v_2$ то снова по M1 $a_1 \vee (a_2 \wedge v_2) = (a_1 \vee a_2) \wedge v_2)$ и значит $[a_1 \vee (a_2 \wedge v_2)] \wedge v_1 = v_3 \wedge v_2 \wedge v_1 = v$. Итак, мы получили $(a_1) \wedge v_1) \vee (a_2) \wedge v_2) = v$. Далее $b_1 \vee b_2 = [u_1 \vee (a_1 \wedge v_1)] \vee [u_2 \vee (a_2 \wedge v_2)] = u_1 \vee u_2 \vee v = v$ поскольку все $u_i \leq v$. Аналогично, $b_1 \vee b_3 = v, b_2 \vee b_3 = v$. Такие же рассуждения приводят к тому, что $b_1 \wedge b_2 = b_1 \wedge b_3 = b_2 \wedge b_3 = u$. Следовательно, по $(**)$ $b_1 = b_2 = b_3 = u = v$. Далее $a_1 \vee u_1 \geq (a_1 \wedge v_1) \vee u_1 = b_1 = b_2 = (a_2 \wedge v_2) \vee u_2 \geq a_2 \wedge v_2$ или $a_1 \vee (a_2 \wedge a_3) \geq a_2 \wedge (a_1 \vee a_3)$. Поэтому $a_2 \wedge (a_1 \vee a_3) = [(a_1 \vee a_3) \wedge a_2] \wedge a_2 \leq [(a_2 \wedge a_3) \vee a_1] \wedge a_2 = (a_2 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge a_2)$. В последнем равенстве мы использовали M1, так как $a_2 \wedge a_3 \leq a_2$. Обратное неравенство $a_2 \wedge (a_1 \vee a_3) \geq (a_2 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge a_2)$ очевидно. $\square$

4.4. Следствие. *Решётка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда она не имеет подрешёток, изоморфных $\mathcal{N}_5$ или $\mathcal{M}_3$.*

4.5. Следствие. *Решётка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда*

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

для любых $x, y, z \in L$.

Доказательство. Необходимость. Применяя сначала D2, а затем D1, имеем $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = [y \vee (x \wedge z)] \wedge (z \vee x) = [y \wedge (z \vee x)] \vee (x \wedge z) = (y \wedge z) \vee (y \wedge x) \vee (x \wedge z)$.

Достаточность. Допустим, что $a \vee b = a \vee c$, $a \wedge b = a \wedge c$. Тогда равенство $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$ примет вид $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$. Но левая часть этого равенства $\geq b$, а правая $\leq b$. Аналогично, $c \leq (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c$. Следовательно, $b = c$. Теорема 4.3 завершает доказательство. $\square$

17°. Рассмотрим множество $FC(a,b)$ всех конечных цепей, лежащих в отрезке $[a,b]$ у.м X $(a \in X, b \in X, a < b)$. Показать, что $(FC(a,b), \subseteq)$ является дистрибутивной решёткой с наменьшим элементом $0 = \{a, b\}$.

18°. Показать, что решётка промежутков $L < a, b >$ не дистрибутивна.

19°. Показать, что решётка кусочно-линейных функций на отрезке $[a,b]$ с поточечным порядком дистрибутивна.
20°. Показать, что решётка $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с поточечным порядком дистрибутивна.
21°. Показать, что решётки EX и TX не дистрибутивны.
22°. Пусть L – дистрибутивная решётка и $a \le b$, $x \le y$ для некоторых a, b, x, $y \in L$. Доказать, что

$$x \wedge a = y \wedge a,\ x \vee b = y \vee b \Leftrightarrow$$
$$\exists p, q \in L[x = (a \vee p) \wedge q,\ y = (b \vee p) \wedge q]$$

§5. Свободные решётки

5.1 Обозначим через **L, M, D** классы (многообразия) всех, всех модулярных и всех дистрибутивных решёток соответственно. Пусть **K** один из этих классов, P – у.м. Решётка $F_{\mathbf{K}}(P)$ называется *свободной* решёткой в классе **K**, порожденной у.м P, если выполнены следующие условия:

(1) $F_{\mathbf{K}}(P) \in \mathbf{K}$;

(2) $P \subseteq F_{\mathbf{K}}(P)$ и если $\sup\{a,b\}, \inf\{c,d\}$ в у.м P существуют, то они должны совпадать с $a \vee b, c \wedge d$ решётки $F_{\mathbf{K}}(P)$;

(3) $L(P) = F_{\mathbf{K}}(P)$;

(4) Пусть $L \in \mathbf{K}$ и $\varphi : P \to L$ отображение сохраняющее порядок такое, что если $\sup\{a,b\}$, $\inf\{c,d\}$ в у.м P существуют, то $\varphi(\sup\{a,b\}) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$, $\varphi(\inf\{c,d\}) = \varphi(c) \wedge \varphi(d)$. Тогда отображение φ можно продолжить до решёточного гомоморфизма $\psi : F_{\mathbf{K}}(P) \to L$.

5.2. Замечание. Гомоморфизм ψ в условии (4)единственен. Свободная решетка $F_{\mathbf{K}}(P)$ единственна с точностью до изоморфизма.

5.3. Лемма. *Пусть x, y, z такие элементы решётки L, что $x \vee y, y \vee z, z \vee x$ попарно несравнимы. Тогда элементы $x \vee y, y \vee z, z \vee x$ порождают* *подрешётку решётки L, изоморфную решётке* $(\mathcal{C}_2)^3$.

Доказательство. Для построения графа подрешётки, порожденной элементами $x \vee y, y \vee z, z \vee x$ надо найти все точные верхние и нижние грани. Так например, $((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee ((x \vee y) \wedge (z \vee x)) = x \vee y$. Действительно, так как $y \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z))$ и $x \leq (x \vee y) \wedge (z \vee x))$, то $x \vee y \leq ((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee ((x \vee y) \wedge (z \vee x))$. Обратное неравенство очевидно.

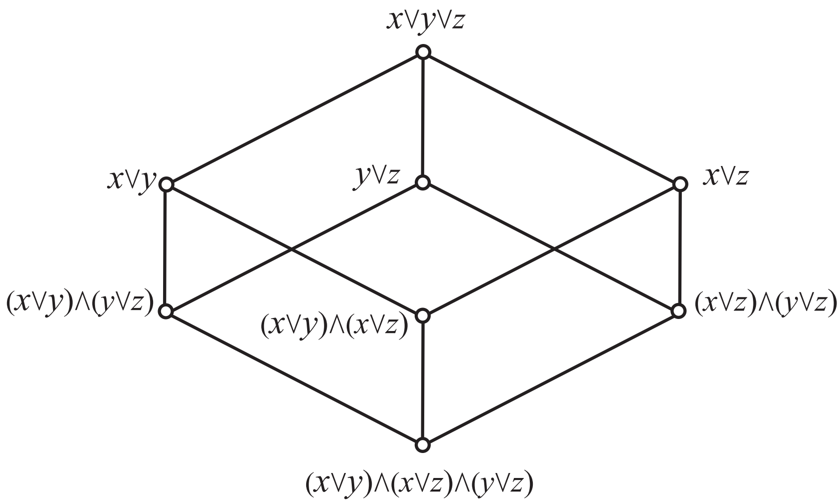

Рис. 3: Граф из леммы 5.3

Или $((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee (z \vee x) = x \vee y \vee z$. Действительно, $y \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$ и значит $((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee (z \vee x) \geq x \vee y \vee z$. Обратное неравенство следует из того, что $x \vee y \vee z$ больше всех рассматриваемых элементов, а операции $\vee, \wedge$ сохраняют неравенства. Итак, получаем граф (см. рис.3). Остается заметить, что все восемь элементов этой подрешетки различны. Действительно, если например $(x \vee y) \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$, то объединяя обе части этого равенства с элементом $z \vee x$ (учитывая доказанное выше), получим $x \vee y \vee z = z \vee x$, то есть $x \vee y \leq z \vee x$. Это противоречит условию леммы. $\square$

5.4. Теорема. *Свободная дистрибутивная решётка* $F_{\mathbf{D}}(3)$, *порожденная тремя попарно несравнимыми элементами* x, y, z *имеет 18 элементов* (см. рис. 4).

Доказательство. Наиболее общая решётка получится, если считать, что

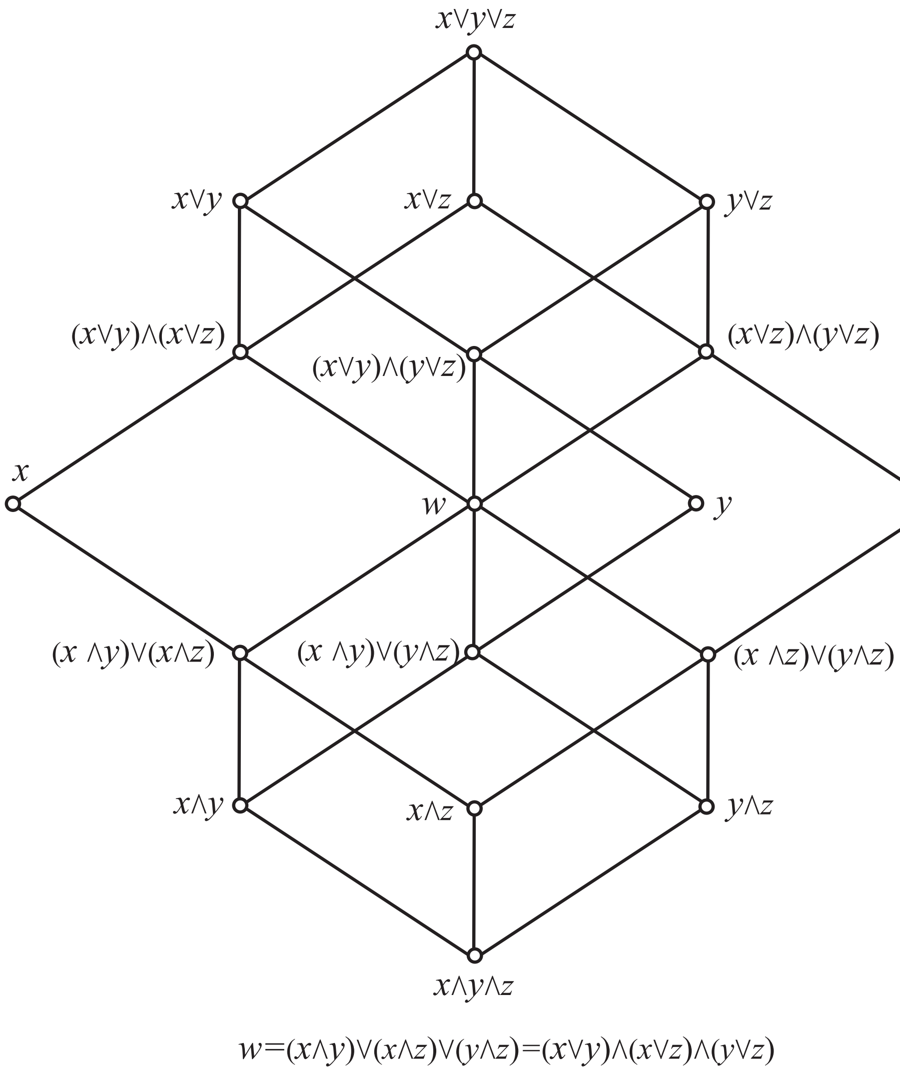

Рис. 4: Свободная решётка $F_{\mathbf{D}}(3)$

элементы в тройках $x \vee y$, $y \vee z$, $z \vee x$ и $x \wedge y$, $y \wedge z$, $z \wedge x$ окажутся попарно несравнимыми. Это приводит к двум 8-элементным подрешёткам, изоморфным решётке $(\mathcal{C}_2)^3$. В силу дистрибутивности (см. 4.5.), их графы будут сцеплены в элементе $w = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ (см. рис. 4). Легко дополнить эти 15 элементов элементами x, y, z до графа решётки $F_{\mathbf{D}}(3)$. Этот граф не содержит подрешёток, изоморфных $\mathcal{N}_5$ или $\mathcal{M}_3$ и по следствию 4.4 и представляет дистрибутивную решётку. Реализуем этот граф в виде решётки подмножеств 6-элементного множества $A \cup B = \{a_0, a_1, a_2\} \cup \{b_0, b_1, b_2\}$. Элементы нижней 8-элементной подрешётки (изоморфной $(\mathcal{C}_2)^3$) состоят из всех подмножеств множества A. Верхняя 8-

элементная подрешётка состоит из множеств вида $A \cup U$, где $U \subseteq B$. Таким образом, элементы графа (на рис. 4) w, x, y, z имеют вид: $w = \{a_0, a_1, a_2\}, x = \{a_0, a_1, b_2\}, y = \{a_0, a_2, b_1\}, z = \{a_1, a_2, b_0\}$. В полученной реализации все 18 элементов различны и она замкнута относительно операций $\cup, \cap$. Значит в решётке, которую она представляет $\vee = \cup, \wedge = \cap$.□

5.5. Теорема. *Свободная модулярная решётка* $F_{\mathbf{M}}(3)$, *порожденная тремя несравнимыми элементами* x, y, z *имеет 28 элементов* (см. рис. 5).

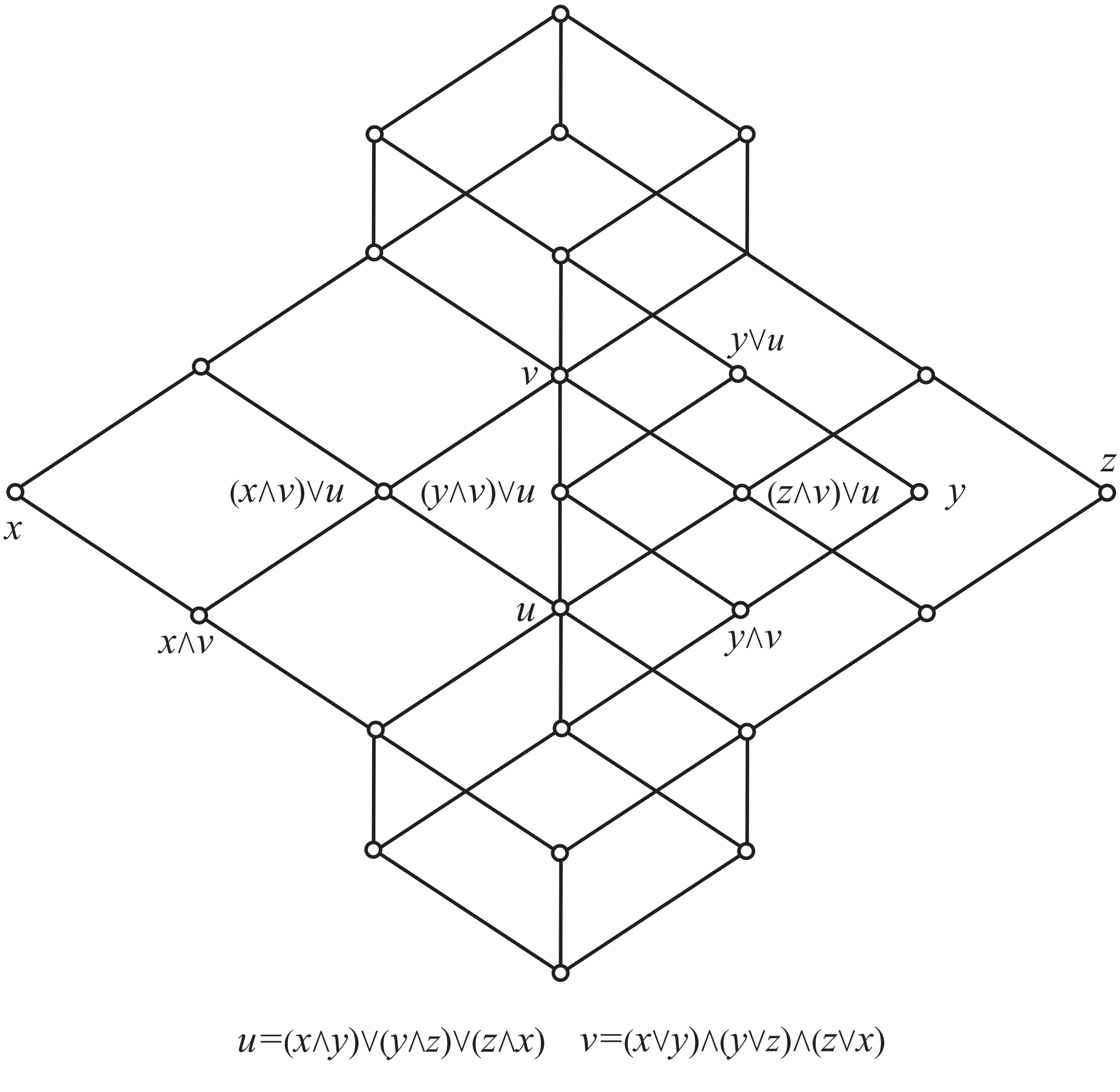

Рис. 5: Свободная решётка $F_{\mathbf{M}}(3)$

Доказательство. Как и в теореме 5.2 наиболее общая решётка получится, если считать, что элементы в тройках $x \vee y,\ y \vee z,\ z \vee x$ и $x \wedge y,\ y \wedge z,\ z \wedge$

x окажутся попарно несравнимыми. Это также приводит к двум восьмиэлементным подрешёткам, изоморфным решётке $(\mathcal{C}_2)^3$. Однако, в общей модулярной решётке элемент $u = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ уже не обязан равняться элементу $v = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$. Так как $u \leq v$, то в общей модулярной решётке надо рассматривать случай $u < v$. Но тогда между элементами u и v есть элементы $x_1 = (x \wedge v) \vee u, y_1 = (y \wedge v) \vee u, z_1 = (z \wedge v) \vee u$, точные верхние грани которых есть элемент v, а точные нижние грани – элемент u.

Например, так как $u \leq (y \wedge v) \vee u, u \leq v$, то применяя дважды M1, имеем $x_1 \wedge y_1 = (u \vee (x \wedge v)) \wedge ((y \wedge v) \vee u) = u \vee ((x \wedge v) \wedge ((y \wedge v) \vee u) = u \vee ((x \wedge v) \wedge (u \vee y) \wedge v) = u \vee ((x \wedge v) \wedge (u \vee y))$. Но $x \wedge v = x \wedge (y \vee z), y \vee u = y \vee (x \wedge z)$. Значит $(x \wedge v) \wedge (y \vee u) = x \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee (x \wedge z))$. Так как $x \wedge z \leq x$, то по M1 $[(x \wedge z) \vee y] \wedge x = (x \wedge z) \vee (y \wedge x) \leq y \vee z$. Таким образом,$x_1 \wedge y_1 = (x \wedge z) \vee (y \wedge x) \vee u = u$. Итак, элементы $\{u, v, (x \wedge v) \vee u, (y \wedge v) \vee u, (z \wedge v) \vee u\}$ образуют подрешётку, изоморфную $\mathcal{M}_3$. Сцепляя её с верхней 8-элементной подрешёткой (изоморфной $(\mathcal{C}_2)^3$) в элементе v, а нижнюю 8-элементную подрешётку (изоморфную $(\mathcal{C}_2)^3$) в элементе u, получаем граф, изображенный на рис. 5. Модулрность этой решетки следует из теоремы 3.2, так она не содержит подрешёток, изоморфных $\mathcal{N}_5$. □

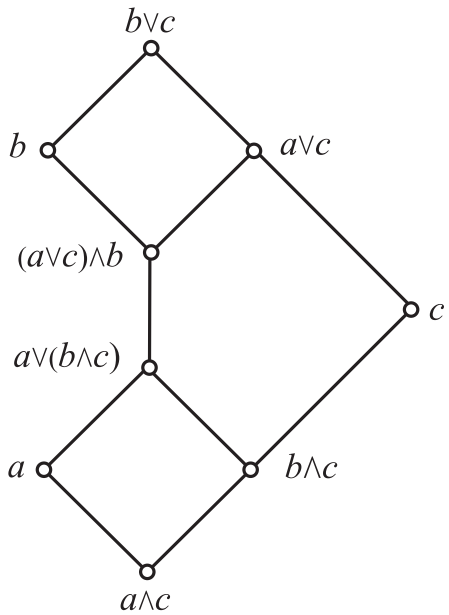

Рис. 6: Свободная решётка $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$

5.6. Легко построить свободную решётку $F_{\mathbf{L}}(\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1)$, порожденную у.м $P = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1 = \{a, b, c\}$, в котором $a < b$, а элемент c не сравним с элементами a, b. Для краткости обозначим $F_{\mathbf{L}}(\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1)$ через $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$. Она состоит из 9 элементов и изображена на рис.6.

5.7. Свободную решётку $F_{\mathbf{L}}(\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_1)$, порожденную у.м $P = \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_1 = \{a, b, c, d\}$, в котором $a < b < c$, а элемент d не сравним с элементами a, b, c, обозначим $\mathcal{C}_3 * \mathcal{C}_1$. Так как $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3$, то решётка $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$ должна вкладываться в $\mathcal{C}_3 * \mathcal{C}_1$. Мы убеждаемся в этом, построив её граф. Он состоит из 20 элементов и изображен на рис. 7.

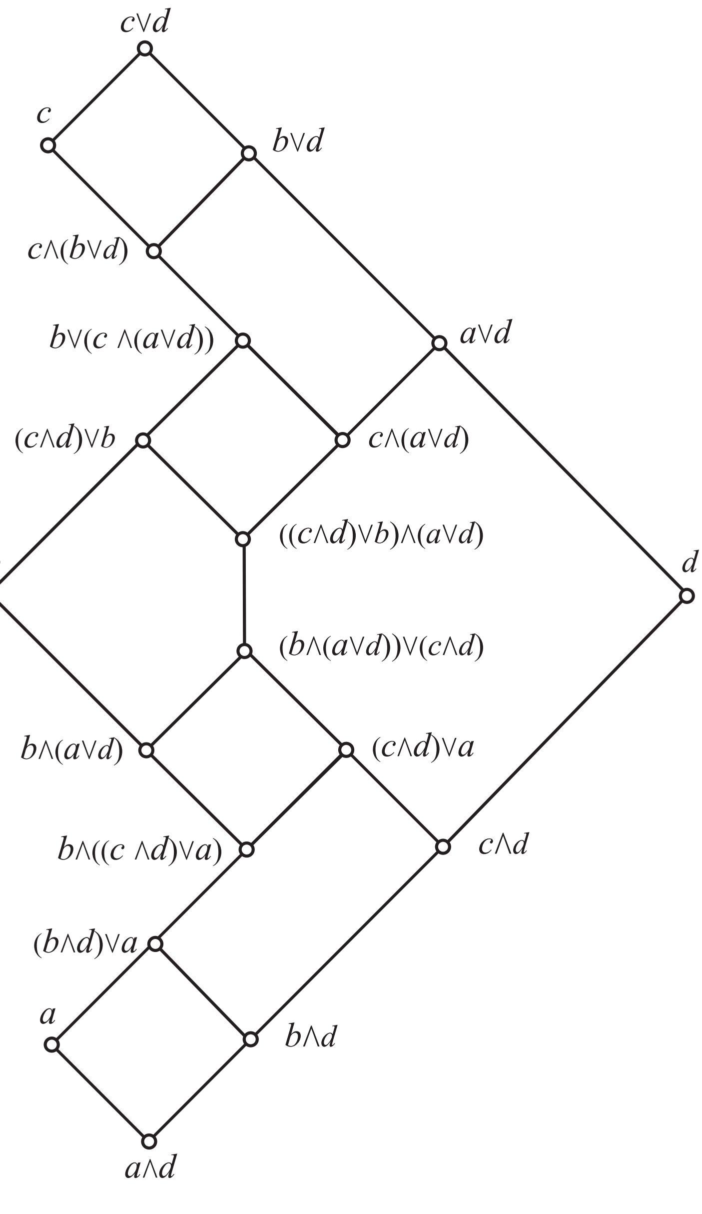

Рис. 7: Свободная решётка $\mathcal{C}_3 * \mathcal{C}_1$

23°. Расставьте на графе свободной решётки $F_{\mathbf{M}}(3)$ все остальные элементы (см. рис. 5).

24°. Постройте реализации свободных решёток $\mathcal{C}_2 * \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_3 * \mathcal{C}_1$.

25°. Постройте графы свободных решёток $F_{\mathbf{K}}(\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1)$ и $F_{\mathbf{K}}(\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_1)$ для многообразий $\mathbf{K} = \mathbf{M},\ \mathbf{D}$.

§6. Булевы алгебры

6.1. Пусть X у.м с 0 и 1. Говорят, что $x, y \in X$ *дизъюнктны*, если $x \wedge y = 0$. Элементы $x, y \in X$ *дополнительны*, если $x \wedge y = 0, x \vee y = 1$. Часть $D \subset X$ называется *дизъюнктной*, если любая пара элементов из D дизъюнктна. Множество A *дизъюнктно* множеству B, если $\forall a \in A\ \forall b \in B (a \wedge b = 0)$. Например, в решётке промежутков $L < a, b >$ отрезок $[a, c]$ и промежуток $[a, c)$ дополнительны к $(c, b]$. Если же $a < c < d < b$, то $[c, d]$ не имеет дополнения.

6.2. *Булевой алгеброй* (б.а) называется дистрибутивная решётка с 0 и 1 в которой каждый элемент имеет дополнение. Б.а $\{0, 1\}$ называется *вырожденной.* Б.а X называется *полной* , если $\forall E \subset X (\sup E \in X,\ \inf E \in X)$. Если это условие выполняется для всех счетных подмножеств E, то б.а X называется *σ-полной.*

6.3. Предложение. *В булевой алгебре любой элемент имеет единственное дополнение.*

Действительно, пусть y_1, y_2 дополнительны к x. Тогда $y_1 = y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge 1(x \vee y_2) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) = 0 \vee (y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2$. Значит $y_1 \leq y_2$. Аналогично $y_2 \leq y_1$. Дополнение к элементу x в ба обозначается x'.

6.4. Свойства дополнения:

$$\text{a)}\ x'' = x; \quad \text{b)}\ x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq x' \quad \text{c)}\ x \leq y \Leftrightarrow y' \leq x';$$

$$\text{d)}\ (\vee x_i)' = \wedge x_i'; \quad (\wedge x_i)' = \vee x_i'.$$

Доказательство. a).Так как $x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$, то x является дополнением к x'. В силу 3.4 $x = x''$.
b) Используя D2, получим $x' = x' \vee 0 = x' \vee (x \wedge y) = (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) = 1 \wedge (x' \vee y) = x' \vee y$. Это означает $y \leq x'$. Обратно, $y \leq x' \Rightarrow x \wedge y \leq x \wedge x' = 0$. Таким образом, x' есть наибольший из дизъюнктных к x элементов.
c) $x \leq y \Rightarrow y' \wedge x \leq y' \wedge y = 0$. В силу b) $y' \leq x'$.
d) В силу a) и c) отображение $' : X \to X$ есть антиавтоморфизм ум X. Поэтому из 1.8. следует свойство d). В частности $1' = (x \vee x')' = x' \wedge x'' = x' \wedge x = 0,\ 0' = 1'' = 1$.□

6.5. Пусть X, Y – б.а и φ изоморфизм X на Y как у.м. Тогда для любых $a, b \in X$

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b); \ \ \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b); \ \ \varphi(a') = \varphi(a)' \qquad (\star)$$

Действительно, первые два равенства уже отмечались в 2.3. Далее так как $\varphi(0) \leq \varphi(x)$ при любом $x \in X$ и φ биекция, то $\varphi(0) = 0$. Аналогично, $\varphi(1) = 1$. Поэтому $0 = \varphi(0) = \varphi(a \wedge a') = \varphi(a) \wedge \varphi(a')$ и $1 = \varphi(a \vee a') = \varphi(a) \vee \varphi(a')$. В силу единственности дополнения $\varphi(a') = \varphi(a)'$.

Снова, как и для решёток, порядковое определение изоморфизма булевых алгебр совпадает с *алгебраическим*: б.а X, Y *изоморфны*, если существует биекция $\varphi : X \to Y$ сохраняющая алгебраические операции $(\star)$.

В следующей теореме получим обобщение аксиомы дистрибутивности D1. Введем следующие обозначения $x \wedge E = \{x \wedge y : y \in E\}$ и $x \vee E = \{x \vee y : y \in E\}$.

6.6. Теорема. *Пусть X – булева алгебра и $E \subset X$ такое, что существует $\sup E$. Тогда для любого $x \in X$*

$$x \wedge \sup E = \sup(x \wedge E). \qquad \text{D3}$$

Доказательство. Так как $x \wedge y \leq x \wedge \sup E (y \in E)$, то $x \wedge \sup E \in (x \wedge E)^s$. Пусть $z \in (x \wedge E)^s, y \in E$. Тогда $z \vee x' \geq (x \wedge y) \vee x' = (x \vee x') \wedge (y \vee x') =$

$y \vee x' \geq y$. Следовательно, $z \vee x' \geq \sup E$. Далее $z = z \vee 0 = z \vee (x \wedge x') = (z \vee x) \wedge (z \vee x') \geq (z \vee x) \wedge \sup E \geq x \wedge \sup E$. Значит $x \wedge \sup E$ – наименьшая из верхних границ для множества $x \wedge E$, то есть выполнено равенство D3.$\square$

6.7. Следствие. *Пусть* X *– булева алгебра и* $E \subset X$ *такое, что существует* $\inf E$. *Тогда для любого* $x \in X$

$$x \vee \inf E = \inf(x \vee E). \qquad \text{D4}$$

Доказательство. В силу свойства d) из 6.4. и D3 имеем $(x \vee \inf E)' = x' \wedge (\inf E)' = x' \wedge (\sup E') = \sup(x' \wedge E') = \sup(x \vee E)' = (\inf(x \vee E))'$. Следовательно, выполнено равенство D4.$\square$

6.8. Дадим теперь (также как это было сделано для решёток) *алгебраическое* определение б.а. Алгебраическая система X с двумя бинарными операциями $\vee, \wedge$ и одной унарной операцией $'$) называется *булевой алгеброй* если $\forall a, b, c \in X$ выполнены требования

a1) операции $\vee, \wedge$ коммутативны и ассоциативны,

a2) $a \wedge (a \vee b) = a,\ \ a \vee (a \wedge b) = a$ (законы поглощения);

a3) $(a \wedge a') \vee b = b,\ \ (a \vee a') \wedge b = b$;

a4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

6.9. Теорема. *Алгебраическое и порядковое определения булевой алгебры эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $(X, \leq, ', 0, 1)$ – порядковая б.а. Тогда, положив

$$a \vee b = \sup\{a, b\},\ \ a \wedge b = \inf\{a, b\}, \qquad (1)$$

получаем, что алгебраическая система $(X, \vee, \wedge, ')$ удовлетворяет всем требованиям a1) – a4).

Обратно, пусть X – алгебраическая б.а. Согласно теореме 2.2 условие $a = a \wedge b \Leftrightarrow a \leq b$ определяет порядок в X. При этом $a = a \wedge b \Leftrightarrow a \vee b = b$, и относительно этого порядка имеют место равенства (1). Из аксиомы a3) следует, что $a \wedge a' \leq b \leq a \vee a'$ для любых $a, b \in X$. Следовательно, $a \wedge a'$ есть наименьший, а $a \vee a'$ есть наибольший элементы в у.м X. Но в у.м наибольший и наименьший элементы единственны и мы можем положить $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$. Тем самым мы показали, что X есть дистрибутивная (в силу аксиомы а4)) решётка с 0, 1 и дополнением $'$. Итак, X – порядковая б.а. $\square$

6.10. Примеры. 1). Пусть Ω – множество. Семейство $\Omega^{\forall}$ всех подмножеств множества Ω с порядком по включению является полной б.а, в которой $\vee = \cup,\ \wedge = \cap,\ {}' = {}^c,\ 0 = \emptyset,\ 1 = \Omega$.

2) Непустое семейство $\mathcal{A} \subset \Omega^{\forall}$ называется *алгеброй множеств* на Ω, если $\Omega \in \mathcal{A}$; $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$; $A^c \in \mathcal{A}$. Это семейство, наделенное порядком по включению является б.а.

3) Пусть Ω – бесконечно. Тогда алгеброй множеств является семейство $\mathcal{A}_{\text{fin}} = \{A \subset \Omega : A$ конечно, или A^c конечно $\}$.

26°. Если $x \le y$ в б.а X, то $z = y \wedge x'$ единственный дизъюнктный к x элемент такой, что $y = x \vee z$. Показать.
27°. Пусть X б.а. Показать, что утверждение $\forall E \subset X(\inf E \in X)$ равносильно утверждению $\forall E \subset X(\sup E \in X)$.
28°. Является ли свободная решётка $F_{\mathbf{D}}(3)$ булевой алгеброй?

§7. Идеалы и фильтры в булевой алгебре

7.1. Пусть X – б.а. Непустое $E \subseteq X$ называется *идеалом*, если

$$\text{i) } x \in E, y \le x \Rightarrow y \in E \quad \text{ii) } x, y \in E \Rightarrow x \vee y \in E.$$

Из первого свойства, которое называется *наследственностью*, следует, что всегда $0 \in E$. Идеал E называется *собственным*, если $E \ne X$. Очевидно, что E собственный $\Leftrightarrow 1 \notin E$. Если E собственный идеал, то $\operatorname{card}(\{a, a'\} \cap E) < 2$ для любого $a \in X$. Пусть $a < 1$. Тогда множество $X_a = \{x \in X : x \le a\}$ есть собственный идеал, который называется *главным.* Собственный идеал называется *максимальным*, если он не содержится в более широком собственном идеале.

Поскольку пересечение любого семейства идеалов является идеалом, то для любого $A \subset X$ существует наименьший идеал $J(A)$, содержащий множество A.

7.2. Лемма. *Пусть A наследственное множество. Тогда*

a) $J(A) = \{\vee_{i=1}^{k} a_i : a_i \in A, k \in \mathbf{N}\}$,

b) *если для любого конечного $B \subset A$ идеал $J(B)$ собственный, то и $J(A)$ собственный.*

Доказательство. a). Обозначим правую часть доказываемого равенства через $A^{\vee}$. Тогда $A \subset A^{\vee} \subset J(A)$ и $A^{\vee}$ удовлетворяет ii) определения идеала. Покажем, что $A^{\vee}$ наследственно. Пусть $x \leq y \in A^{\vee}, y = y_1 \vee y_2 \vee ... y_k, y_i \in A$. Положим $x_i = x \wedge y_i$. Так как $x_i \leq y_i$, то $x_i \in A$. Далее $x_1 \vee ... \vee x_k = x \wedge (y_1 \vee ... \vee y_k) = x \wedge y = x$. Значит $x \in A^{\vee}$ и $J(A) = A^{\vee}$.

b) Допустим, что $1 \in J(A)$. Тогда по a) найдутся $a_1, ..., a_k \in A$ такие, что $1 = a_1 \vee ... \vee a_k$. Но тогда для $B = \{a_1, ..., a_k\}$ идеал $J(B)$ содержит $a_1 \vee ... \vee a_k = 1$. Противоречие. □

7.3. Предложение. *Каждый собственный идеал содержится в максимальном идеале. В частности, любой, неравный 1, элемент лежит в некотором максимальном идеале.*

Доказательство. Пусть E – собственный идеал. Рассмотрим $\mathcal{E} = \{I : E \subseteq I, I-$собственный идеал $\}$ как у.м по включению. Если $\{I_j\}$ – цепь в $\mathcal{E}$, то $F = \cup I_j$ есть собственный идеал, содержащий E. Действительно, $x \leq y \in F \Rightarrow \exists j (y \in I_j) \Rightarrow x \in I_j \subset F$. Если $x_1, x_2 \in F$, то найдутся два индекса j_1, j_2 такие, что $x_1 \in I_{j_1}, x_2 \in I_{j_2}$. Так как $\{I_j\}$ цепь, то либо $I_{j_1} \subset I_{j_2}$, либо $I_{j_2} \subset I_{j_1}$. Значит x_1, x_2 лежат в одном из этих идеалов, и поэтому $x_1 \vee x_2 \in I_{j_1} \cup I_{j_2} \subset F$. Итак, любая цепь $\{I_j\}$ в $\mathcal{E}$ ограничена сверху элементом $\cup I_j \in \mathcal{E}$. По лемме Цорна $\mathcal{E}$ имеет максимальный элемент. Наконец, заметим, что $\forall a < 1, a \in X_a$ и X_a собственный идеал. □

Теперь получим характеризацию максимальных идеалов в б.а.

7.4. Теорема. *Пусть X – ба, I – идеал. Эквивалентны утверждения:*

1) *I – максимальный идеал;* 2) $\forall a \in X$ $(\mathrm{card}(\{a, a'\} \cap I) = 1)$.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$ 2). Если $a = 0$, то $0 \in I$, если $a = 1$, то $a' = 0 \in I$. Пусть $0 < a < 1$ и $a \notin I, a' \notin I$. Рассмотрим множество $K = I \vee X_a = \{x \vee y : x \in I, y \in X_a\}$. Покажем, что K – собственный идеал.

i). Пусть $z \leq w \in K, w = x \vee y, x \in I, y \in X_a$. Положим $z_1 = z \wedge x, z_2 = z \wedge y$. Тогда $z_1 \in I, z_2 \in X_a$ и $z_1 \vee z_2 = z \wedge (x \vee y) = z \wedge w = z$. Поэтому $z \in K$.

ii). Пусть $v, w \in K, v = x_1 \vee y_1, w = x_2 \vee y_2$, где $x_i \in I, y_i \in X_a$. Тогда $x_1 \vee x_2 \in I, y_1 \vee y_2 \in X_a$. Поэтому $v \vee w = (x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2) \in K$.

iii). Допустим, что $1 \in K$. Тогда найдутся $x \in I, y \in X_a$ такие, что $1 = x \vee y$. Так как $0 = x' \wedge y'$, то по свойству b) 6.4. $y' \leq (x')' = x$. В силу $y \leq a$, получим $a' \leq y' \leq x, a' \in I$. Это противоречит предположению $a' \notin I$.

Итак, K – собственный идеал, $K \supset I, K \neq I$. Это противоречит максимальности I.

2)$\Rightarrow$ 1). Допустим, что I не максимален. Тогда существует собственный идеал $K \supset I, K \neq I$. Значит существует $a \in K, 0 < a < 1, a \notin I$. По условию $a' \in I$, тогда $a' \in K, a \vee a' = 1 \in K$. Противоречие с тем, что K собственный идеал.$\square$

7.5. Следствие. *Пусть I – максимальный идеал, E_1, E_2 идеалы и $I \supset E_1 \cap E_2$. Тогда I содержит целиком один из них.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда $\exists x_i \in E_i \backslash I (i = 1, 2)$. По теореме 4.4. $x_i' \in I$. Значит $x_1 \vee x_2 \in I$. В силу наследственности $x_1 \wedge x_2 \in E_1 \cap E_2 \subset I$. Следовательно, $I \ni x_1' \vee x_2' \vee (x_1 \wedge x_2) = (x_1 \wedge x_2)' \vee (x_1 \wedge x_2) = 1$. Противоречие с тем, что I собственный.$\square$

7.6. Часть F б.а X называется *фильтром*, если $\{x' : x \in F\}$ есть собственный идеал в X. Максимальный относительно включения фильтр называется *ультрафильтром.* Результаты, изложенные в 7.1 – 7.5, имеют соответствующие аналоги для фильтров и ультрафильтров.

29°. Показать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_{a_i} = X_{a_1\wedge\ldots\wedge a_n}$, $J(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{a_i}) = X_{a_1\vee\ldots\vee a_n}$.

§8. Топологическая реализация булевых алгебр

8.1. Пусть T – топологическое пространство. Семейство $CO(T)$ всех открыто-замкнутых подмножеств T есть алгебра множеств. Топологическое пространство T называется *вполне несвязным*, если $CO(T)$ является базисом его топологии.

Пусть X– б.а и Q – множество всех максимальных идеалов в X. Для идеала I в X обозначим $\mathcal{M}(I) = \{q \in Q : q \supseteq I\}$.

8.2. Свойства $\mathcal{M}(\cdot)$:

1) $\mathcal{M}(\{0\}) = Q$, $\mathcal{M}(X) = \emptyset$, $\mathcal{M}(q) = \{q\}$. 2) $I_1 \subset I_2 \Rightarrow \mathcal{M}(I_2) \subset \mathcal{M}(I_1)$.

3) Пусть $\mathcal{E}$ – множество идеалов. Тогда $\bigcap\limits_{I\in\mathcal{E}} \mathcal{M}(I) = \mathcal{M}(J(\bigcup\limits_{I\in\mathcal{E}} I))$.

4) $\mathcal{M}(I_1) \cup \mathcal{M}(I_2) = \mathcal{M}(I_1 \cap I_2)$ для любых идеалов I_1, I_2.

Доказательство. 3) $q \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{E}} \mathcal{M}(I) \Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{E}(q \supseteq I) \Leftrightarrow q \supseteq \bigcup\limits_{I\in\mathcal{E}} I \Leftrightarrow q \supseteq J(\bigcup\limits_{I\in\mathcal{E}} I)$. 4) Если $q \in \mathcal{M}(I_1) \cup \mathcal{M}(I_2)$, то $q \supseteq I_1$ или $q \supseteq I_2$. Следовательно, $q \supseteq I_1 \cap I_2$. Обратно, если $q \supseteq I_1 \cap I_2$, то по следствию 7.5. q содержит целиком один из идеалов I_1, I_2. Значит $q \in \mathcal{M}(I_1) \cup \mathcal{M}(I_2)$.$\square$

8.3. Теорема Стоуна. *Для любой булевой алгебры X существует вполне несвязный отделимый компакт Q такой, что X изоморфна $CO(Q)$. Компакт Q единственен с точностью до гомеоморфизма.*

Доказательство. Пусть Q – семейство всех максимальных идеалов в б.а X. Введем топологию в Q, объявив замкнутими множествами все подмножества Q вида $\mathcal{M}(I)$, где I идеал в X. Из свойств 3), 4) пункта 8.2. следует, что выполнены аксиомы замкнутых множеств.

Пусть $a \in X$. Покажем, что $Q \backslash \mathcal{M}(X_a) = \mathcal{M}(X_a)^c = \mathcal{M}(X_{a'})$. Если $q \notin \mathcal{M}(X_a)$, то $q \not\supseteq X_a, q \not\ni a$. По теореме 7.4. $a' \in q$ и значит $q \supseteq X_{a'}$, $q \in \mathcal{M}(X_{a'})$. Обратно, если $q \in \mathcal{M}(X_{a'})$, то $q \supseteq X_{a'}$, $q \ni a'$. Так как q собственный идеал, то $q \not\ni a$ и, следовательно, $q \not\supseteq X_a$, $q \notin \mathcal{M}(X_a)$. Итак, все множества вида $\mathcal{M}(X_a)$ являются открыто-замкнутыми.

Покажем, что семейство $\{\mathcal{M}(X_a) : a \in X\}$ образует базис введенной топологии на Q. Рассмотрим произвольное открытое множество $Q \backslash \mathcal{M}(I) = \{q \in Q : q \not\supseteq I\}$. Установим, что $Q \backslash \mathcal{M}(I) = \cup\{\mathcal{M}(X_{a'}) : a \in I\}$. Если $q \not\supseteq I$, то найдется $a \in I$ такое, что $a \notin q$. Тогда в силу теоремы 7.4. $a' \in q$, $q \supseteq X_{a'}$ и, следовательно, $q \in \mathcal{M}(X_{a'})$. Обратно, $q \in \cup\{\mathcal{M}(X_{a'}) : a \in I\}$ означает, что найдется $a \in I$ такое, что $q \in \mathcal{M}(X_{a'})$. Поэтому $q \supseteq X_{a'}$, $q \ni a'$. Но тогда $q \not\ni a$, $q \not\supseteq I$, $q \in Q \backslash \mathcal{M}(I)$. Итак, топология Q вполне несвязна.

Установим, что Q – отделимый компакт. Действительно, если $q_1 \neq q_2$, то $\exists a \in X (a \in q_1 \backslash q_2)$. По теореме 7.4. $a' \in q_2 \backslash q_1$ и значит $q_1 \in \mathcal{M}(X_a), q_2 \in \mathcal{M}(X_{a'}) = \mathcal{M}(X_a)^c$. Итак, окрестности $\mathcal{M}(X_a)$ и $\mathcal{M}(X_{a'})$ точек q_1 и q_2 не пересекаются.

Пусть $\{\mathcal{M}(I) : I \in \mathcal{E}\}$ – произвольное семейство замкнутых множеств такое, что любое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение. Если $\cap\{\mathcal{M}(I) : I \in \mathcal{E}\} = \mathcal{M}(J(\cup\{I : I \in \mathcal{E}\})) = \emptyset$, то $J(\cup\{I : I \in \mathcal{E}\}) = X$. Но множество $\cup\{I : I \in \mathcal{E}\}$ наследственно. По лемме 7.2. существует конечный набор $a_i \in I_i (i = 1, ..., k; I_i \in \mathcal{E})$ такой, что $a_1 \vee ... \vee a_k = 1$. Это влечет $J(\cup_{i=1}^k I_i) = X$. Тогда $\emptyset = \mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(J(\cup_{i=1}^k I_i)) = \cap_{i=1}^k \mathcal{M}(I_i)$. Противоречие.

Установим, что других открыто-замкнутых множеств кроме $\mathcal{M}(X_a)$ нет. Заметим в начале, что в силу упражнения 28° и 8.2. $\mathcal{M}(X_{a_1}) \cap ... \cap \mathcal{M}(X_{a_n}) = \mathcal{M}(J(X_{a_1} \cup ... \cup X_{a_n})) = \mathcal{M}(X_{a_1 \vee ... \vee a_n})$. Отсюда, переходя к дополнениям, $\mathcal{M}(X_{a_1}) \cup ... \cup \mathcal{M}(X_{a_n}) = \mathcal{M}(X_{a_1 \wedge ... \wedge a_n})$.

Если U открыто-замкнуто, то $U = \cup_{a \in A} \mathcal{M}(X_a)$ в силу открытости U. В силу же замкнутости U является компактным. Поэтому из его открытого покрытия $\{\mathcal{M}(X_a) : a \in A\}$ можно выделить конечное подпокрытие $U = \cup_{i=1}^n \mathcal{M}(X_{a_i}) = \mathcal{M}(X_{a_1 \wedge ... \wedge a_n})$, где $a_i \in A$.

Определим отображение $\varphi : X \to CO(Q)$ по формуле $\varphi(a) = \mathcal{M}(X_{a'})$ и покажем, что φ есть изоморфизм.

Действительно, $a \le b \Leftrightarrow X_a \subseteq X_b \Rightarrow \mathcal{M}(X_a) \supseteq \mathcal{M}(X_b) \Rightarrow \mathcal{M}(X_a)^c \subseteq \mathcal{M}(X_b)^c, \mathcal{M}(X_{a'}) \subseteq \mathcal{M}(X_{b'})$, то есть $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$.

Обратно. Допустим, что $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, но $a \not\le b$. Так как в силу 6.4 b) $a \le b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0$, то это значит, что элемент $z = a \wedge b' > 0$, а $z' = a' \vee b < 1$. В силу предложения 7.3 существует максимальный идеал $q \ni z'$. Этот идеал $q \not\ni b'$, иначе $q \ni z' \vee b' = a' \vee b \vee b' = 1$. Поэтому $q \supseteq X_{z'}, q \not\supseteq X_{b'}$ или $q \in \mathcal{M}(X_{z'}), q \notin \mathcal{M}(X_{b'})$. Так как $z' \ge a'$, то $X_{z'} \supseteq X_{a'}, \mathcal{M}(X_{z'}) \subseteq \mathcal{M}(X_{a'})$. Это вместе с $\mathcal{M}(X_{z'}) \not\subseteq \mathcal{M}(X_{b'})$ дает $\mathcal{M}(X_{a'}) \not\subseteq \mathcal{M}(X_{b'})$. Противоречие. Итак, $a \le b \Leftrightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$.

Установим единственность Q. Пусть $\tilde{Q}$ – другой вполне несвязный отделимый компакт такой, что $\tilde{\varphi} : X \to CO(\tilde{Q})$ есть изоморфизм булевых алгебр. Рассмотрим композицию $\psi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : CO(Q) \to CO(\tilde{Q})$, значения которой будем обозначать $\psi(U) = \tilde{U}$. Тогда ψ есть биекция, переводящая пустое множество в пустое, Q в $\tilde{Q}$, а также сохраняющая операции:

$$(U_1 \cup U_2)^{\sim} = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2,\ (U_1 \cap U_2)^{\sim} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2,\ (U_1^c)^{\sim} = (\tilde{U}_1)^c. \qquad (2)$$

Пусть $\{U_i(q) : i \in I\}$ – семейство всех открыто-замкнутых окрестностей точки $q \in Q$. Так как топология в Q отделима, то $\bigcap\limits_{i \in I} U_i(q) = \{q\}$. Рассмотрим семейство $\{\psi(U_i(q)) \equiv \tilde{U}_i\ : i \in I\}$. Если $\bigcap\limits_{i \in I} \tilde{U}_i = \emptyset$, то $\tilde{Q} = \bigcup\limits_{i \in I} \tilde{U}_i^c$ и так как $\tilde{Q}$ компакт, то существуют индексы $i_1, ..., i_n \in I$ такие, что $\tilde{Q} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \tilde{U}_{i_k}^c$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \tilde{U}_{i_k} = \emptyset$. В силу (2) получаем $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}(q) = \emptyset$. Противоречие.

Пусть $\tilde{q} \in \bigcap\limits_{i \in I} \tilde{U}_i$. Тогда $\tilde{U}_i$ есть открыто-замкнутая окрестность точки $\tilde{q}$ для любого $i \in I$. Предположим, что в семействе $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ перечислены не все открыто-замкнутые окрестности точки $\tilde{q}$. Это означает, что существует открыто-замкнутая окрестность $\tilde{U}(\tilde{q})$ такая, что $\tilde{U}(\tilde{q}) \ne \tilde{U}_i$ для любого $i \in I$. Пусть U такое открыто-замкнутое множество в Q, что $\psi(U) = \tilde{U}(\tilde{q})$. Тогда

$U \neq U_i(q)$ для любого $i \in I$ и, следовательно, $q \notin U$. Тогда $q \in U^c$, а поскольку U^c – открыто-замкнуто, то найдется индекс $i_0 \in I$ такой, что $U^c = U_{i_0}(q)$. В силу (2) $\tilde{U}(\tilde{q})^c = \tilde{U}_{i_0}$. Противоречие с тем, что $\tilde{q} \in \tilde{U}_{i_0}$ и $\tilde{q} \notin \tilde{U}(\tilde{q})^c$.

Итак, в семействе $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ перечислены все открыто-замкнутые окрестности точки $\tilde{q}$. Тогда $\bigcap\limits_{i \in I} \tilde{U}_i = \{\tilde{q}\}$ и значит мы можем определить отображение $f : Q \to \tilde{Q}$ по формуле $f(q) = \tilde{q}$. Ясно, что f является биекцией и для любого открыто-замкнутого множества U в Q образ $f(U) = \tilde{U}$ является открыто-замкнутым множеством. Аналогично, прообраз любого открыто-замкнутого множества при отображении f является открыто-замкнутым множеством. Так как открыто-замкнутые множества образуют базис топологии, это означает, что f гомеоморфизм. Теорема Стоуна доказана. $\square$

Пару (Q, φ), построенную в теореме 8.3 будем называть *представлением Стоуна* б.а X.

В б.а X введем операции *разности* $x - y = x \wedge y'$; *симметрической разности* $|x - y| = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$; и *операции Шеффера* $x|y = x' \wedge y'$.

8.4. Следствие. *В любой булевой алгебре справедливы утверждения:*

$$1)\ x = |y - |x - y||,\ |x - y| = |x' - y'|,\quad 2)\ |x - y| = x \vee y - x \wedge y,$$

$$3)\ x \leq y \vee |x - y|,\ 4)\ |x - y| \leq |x - z| \vee |z - y|,$$

$$5)\ |x \Diamond y - x \Diamond z| \leq |y - z|,\ 6)\ |x \Diamond y - z \Diamond u| \leq |x - z| \vee |y - u|,$$

где $\Diamond$ *одна из операций* $\vee$ *или* $\wedge$.

Доказательство сводится (в силу теоремы Стоуна) к доказательству этих равенств в алгебре множеств. Нетрудно видеть, что $x \vee y = (x|y)|(x|y)$, $x \wedge y = (x|x)|(y|y)$, $x' = x|x$ и операция $x|y$ коммутативна.

30°. Пусть J – идеал всех конечных подмножеств бесконечного множества Ω, $J^c = \{A^c : A \in J\}$, и символ $* \notin \Omega$. Показать, что пространством Стоуна для алгебры $\mathcal{A}_{\text{fin}} = J \cup J^c$ является множество $\Omega^* = \Omega \cup \{*\}$ с базисом топологии $J \cup J^{c*}$, где $J^{c*} = \{A^c \cup \{*\} : A \in J\}$ (*одноточечная компактификация* Ω).

31°. Пусть τ – топология стоуновского представления (Q,φ) б.а X и $\mathcal{E}$ – множество всех идеалов в X. Показать, что отображение $f(U) = \{a \in X : \varphi(a) \subset U\}, U \in \tau$ задает биекцию между множествами τ и $\mathcal{E}$, причем $f^{-1}(I) = \bigcup\limits_{a\in I} \varphi(a), I \in \mathcal{E}$.

32°. Пусть $\tau^c = \{U^c : U \in \tau\}$ – семейство всех замкнутых множеств в Q стоуновского представления (Q,φ) б.а X и $\mathcal{F}$ – множество всех фильтров в X. Показать, что отображение $g(Z) = \{a \in X : Z \subset \varphi(a)\}, Z \in \tau^c$ задает биекцию между множествами τ^c и $\mathcal{F}$, причем $g^{-1}(F) = \bigcap\limits_{a\in F} \varphi(a), F \in \mathcal{F}$.

§9. Дизъюнктные дополнения. Компоненты

9.1. *Дизъюнктным доплнением* множества E в б.а X называется множество $E^d = \{y \in X : \forall x \in E (x \wedge y = 0)\}$. Если $E^d = \{0\}$, то говорят, что множество E *полно.*

9.2. Свойства дизъюнктного доплнения:

1). Если $E \cap E^d \neq \emptyset$, то $E \cap E^d = \{0\}$; 2). $E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_2^d \subset E_1^d$;

3). $E \subseteq E^{dd}$, $E^d = E^{ddd}$; 4). $y \in E^s \Leftrightarrow y' \in E^d$;

5). Если существует $\sup E$, то $\sup E \in E^{dd}$; 6). E^d – идеал;

7). $X_a^d = X_{a'}$; 8). $x = \sup E \Rightarrow x' = \sup E^d$;

9). Если для $E_1 \subseteq E^d$ существует $\sup E_1$, то $\sup E_1 \in E^d$;

10). $\bigcap\limits_{E\in\mathcal{E}} E^d = (\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E)^d$.

Доказательство. 3). Если $x \in E$, то $x \wedge y = 0$ для любого $y \in E^d$. Следовательно, $x \in E^{dd}$. Имеем $E^d \subseteq (E^d)^{dd}$. Обратно, если $x \in E^{ddd}$, то x дизъюнктен к $E^{dd} \supseteq E$ и значит x дизъюнктен к E, $x \in E^d$. 4). Для любого $x \in E$ неравенство $y' \leq x'$ влечет $y' \wedge x \leq x' \wedge x = 0$. Обратно, пусть $y' \in E^d$. Тогда $\forall x \in E (x \wedge y' = 0)$ влечет $x = x \wedge (y \vee y') = x \wedge y$, $x \leq y$. 5). По теореме 6.6. $y \wedge \sup E = \sup(y \wedge E) = 0$ для любого $y \in E^d$. 6). Пусть $x, y \in E^d$. Тогда $\forall z \in E (z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0)$ и, следовательно, $x \vee y \in E^d$.

7). Пусть $y \in X_a^d$. Так как $a \in X_a$, то $y \wedge a = 0$. Поэтому $y \leq a'$, $X_a^d \subseteq X_{a'}$. Обратно, если $z \leq a'$, то $z \wedge a \leq a' \wedge a = 0$, $z \in X_a^d$. 8). Если $y \in E$, то $x' \wedge y \leq x' \wedge x = 0$, $x' \in E^d$. Так как x' наибольший элемент, дизъюнктный к x, то $z \in E^d \Rightarrow z \wedge = 0 \Rightarrow z \leq x'$, $x' \in (E^d)^s$. Итак, $x' \in E^{ds} \cap E^d$, то есть $x' = \sup E^d$. 9). $E_1 \subseteq E^d \Rightarrow E \subseteq E^{dd} \subseteq E_1^d$. Поэтому для любого $x \in E \subseteq E_1^d$ по теореме 6.6. $x \wedge \sup E_1 = \sup(x \wedge E_1) = 0$. Это влечет $\sup E_1 \in E^d$. 10). $\forall E \in \mathcal{E}(x \wedge E = 0) \Leftrightarrow x \wedge \bigcup\limits_{E \in \mathcal{E}} E = 0$.$\square$

9.3. Лемма. $y = \sup E \Leftrightarrow y' \in E^d$ и $y \in E^{dd}$.

Доказательство. Необходимость. В силу свойства 5) $y = \sup E \in E^{dd}$. В силу 8) $y' = \sup E^d$. Тогда по теореме 6.6. $x \wedge \sup E^d = \sup(x \wedge E^d) = 0$ для любого $x \in E$. Поэтому $y' \in E^d$.

Достаточность. Если $y' \in E^d$, то в силу свойства 4) $y \in E^s$. Пусть $z \in E^s$. Снова по 4) $z' \in E^d$. По условию $y \in E^{dd}$; это влечет $y \wedge z' = 0$, $y \leq z$. Итак, y – наименьшая из верхних границ множества E, то есть $y = \sup E$. $\square$

9.4. Часть E б.а X называется *компонентой*, если $E = E^{dd}$. Примерами компонент являются E^d и X_a (следует из свойства 3) и 7)). Компонента является идеалом (свойство 6)).

Пусть $\{E_i\}$ – семейство компонент. В силу свойства 10) $\cap E_i = \cap E_i^{dd} = (\cup E_i^d)^d$ также является компонентой. Следовательно, для любой части $F \subset X$ существует наименьшая по включению компонента содержащая F. Она обозначается X_F. Очевидно, что $J(F) \subseteq X_F$.

9.5. Лемма. $X_{\{a_1,...,a_n\}} = X_{a_1 \vee ... \vee a_n}$; $\quad X_F = F^{dd}$.

Доказательство. Так как $X_{\{a_1,...,a_n\}} \supset \{a_1, ..., a_n\}$, то $a_i \in X_{\{a_1,...,a_n\}}(i = 1, ..., n)$. Но $X_{\{a_1,...,a_n\}}$ идеал, следовательно, $a_1 \vee ... \vee a_n \in X_{\{a_1,...,a_n\}}$ и $X_{a_1 \vee ... \vee a_n} \subset X_{\{a_1,...,a_n\}}$. С другой стороны, $X_{a_1 \vee ... \vee a_n}$ компонента, содержащая множество $\{a_1, ..., a_n\}$. Значит $X_{a_1 \vee ... \vee a_n}$ содержит наименьшую компоненту $X_{\{a_1,...,a_n\}}$.

Так как $F \subseteq F^{dd}$, а F^{dd} компонента, то $X_F \subset F^{dd}$. По свойству 2) $F \subset X_F \Rightarrow F^{dd} \subset X_F^{dd} = X_F$. $\square$

Из леммы 9.5. следует, что если E максимальный идеал, не являющийся компонентой, то $E^{dd} = X$.

9.6. Предложение. *Эквивалентны:*

$$\text{i) } a = \sup F, \quad \text{ii) } X_F = X_a, \quad \text{iii) } X_{a'} = F^d.$$

Доказательство. i) $\Rightarrow$ ii): По лемме 9.3. $a \in F^{dd}, a' \in F^d$. Поэтому $X_a \subset F^{dd}, X_{a'} \subset F^d$ и в силу свойства 7) пункта 9.2. $X_a = (X_{a'})^d \supset F^{dd}$. Итак, $X_a = F^{dd} = X_F$.
ii) $\Rightarrow$ iii): Пусть $X_F = X_a$. Тогда $X_{a'} = (X_a)^d = (X_F)^d = (F^{dd})^d = F^d$.
iii) $\Rightarrow$ i): По условию $a' \in F^d$. По свойству 7) пункта 9.2. $X_a = (X_{a'})^d = F^{dd}$, $a \in F^{dd}$. По лемме 9.3. $a = \sup F$ и предложение доказано.$\square$

9.7. Теорема. *Пусть X –булева алгебра, $\tilde{X}$ – множество всех компонент X. Тогда $(\tilde{X}, \subseteq)$ есть полная булева алгебра.*

Доказательство. Если $\mathcal{E} \subset \tilde{X}$, то в силу свойства 10) пункта 6.2. $\bigwedge\limits_{E\in\mathcal{E}} E = \bigcap\limits_{E\in\mathcal{E}} E^{dd} = (\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E^d)^d$. В силу леммы 9.5. $\bigvee\limits_{E\in\mathcal{E}} E = X_{\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E} = (\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E)^{dd}$. Итак, $\tilde{X}$ есть полная решётка, в которой $\tilde{0} = \{0\}$, $\tilde{1} = X$.

Покажем, что E^d есть дополнение в $\tilde{X}$ к E. Действительно, $E^d \wedge E = E^d \cap E = 0 = \tilde{0}$. Далее в силу 10) пункта 9.2. $(E \cup E^d)^d = E^d \cap E^{dd} = E^d \cap E = 0$. Поэтому $E \vee E^d = (E \cup E^d)^{dd} = \{0\}^d = X = \tilde{1}$.

Проверим дистрибутивность в $\tilde{X}$. Пусть $E_i \in \tilde{X} (i = 1, 2, 3)$. Обозначим $A = (E_1 \vee E_2) \wedge E_3,\ B = (E_1 \wedge E_3) \vee (E_2 \wedge E_3)$. Достаточно доказать, что $A \subseteq B$.

Допустим, что $A \not\subset B$, то есть существует $u \in A \backslash B$. Тогда обязательно найдется $0 < w \leq u$ такой, что $w \in B^d$. Действительно, если этого нет, то для любого $z \in B^d$ в силу того, что $u \wedge z \in B^d$, $u \wedge z \leq u$ должно быть $u \wedge z = 0$. Но тогда $u \in B^{dd} = B$. Противоречие.

По определению операций $\vee, \wedge$ в $\tilde{X}$ имеем $B = [(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap E_3)]^{dd} = [(E_1 \cup E_2) \cap E_3]^{dd}$; $B^d = [(E_1 \cup E_2) \cap E_3]^d$; $A = (E_1 \vee E_2) \cap E_3$. Так как A идеал, то $u \in A \Rightarrow w \in A$, то есть $w \in E_3,\ w \in E_1 \vee E_2 = (E_1 \cup E_2)^{dd}$. В силу того, что $w > 0$ имеем $w \notin (E_1 \cup E_2)^d$. Поэтому найдется $v \in E_1 \cup E_2$ такой, что $0 < v \wedge w = t$. Так как множество $E_1 \cup E_2$ наследственно, то $t \in E_1 \cup E_2$; так как E_3, B^d идеалы, то $t \in E_3, t \in B^d$. Итак, $0 < t \in (E_1 \cup E_2) \cap E_3$ и $t \in B^d = [(E_1 \cup E_2) \cap E_3]^d$. Это противоречит свойству 1) пункта 9.2. □

33°. Привести пример б.а X и идеала E в X такого, что $E \neq E^{dd}$.

§10. Полные булевы алгебры

10.1. Напомним, что б.а X называется полной, если $\forall E \subset X (\sup E \in X,\ \inf E \in X)$. В полной б.а любая компонента есть главный идеал. Действительно, если F компонента, то для $a = \sup F$ по предложению 9.6 $F = X_F = X_a$.

Компакт Q называется *экстремальным*, если замыкание любого открытого в Q множества является открытым.

10.2. Теорема (Стоун – Огасавара). *Булева алгебра X полна тогда и только тогда, когда ее стоуновский компакт Q экстремален.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X – полная б.а, $G \subset Q$ и G – открыто. Так как Q вполне несвязно, то $G = \cup E_i$, где все E_i являются открыто-замкнутыми. Пусть φ – стоуновский изоморфизм и $e_i \in X$ те элементы, что $\varphi(e_i) = E_i$. Положим $x = \vee e_i$ и покажем, что $\varphi(x) = G^-$.

Из неравенств $x \geq e_i$ следует, что $\varphi(x) \supset \varphi(e_i) = E_i$, $\varphi(x) \supset \cup E_i = G$. Но $\varphi(x)$ открыто-замкнуто, значит $\varphi(x) \supset G^-$. Далее $\varphi(x) \backslash G^-$ – открыто и если оно не пусто, то найдется непустое открыто-замкнутое множество $G_1 \subset \varphi(x) \backslash G^-$. Пусть $x_1 \in X$ такой, что $\varphi(x_1) = G_1$. Так как $E_i \subset G \subset G^- \subset \varphi(x) \backslash G_1$, то $e_i \leq x \wedge x_1' < x$. Это влечет $x = \vee e_i \leq x \wedge x_1' < x$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $e_i \in X$ и $\varphi(e_i) = E_i$ – открыто-замкнуты. Положим $G = \cup E_i$. Это множество открыто и по условию G^- также открыто, а как замыкание, оно одновременно замкнуто. Пусть $e \in X$ такой, что $\varphi(e) = G^-$.

Тогда из $E_i \subset G \subset G^-$ следует, что $e_i \leq e$. Если $e_i \leq z$, то $\varphi(e_i) \subset \varphi(z)$ и $\varphi(z)$ открыто-замкнуто. Значит $G = \cup E_i \subset \varphi(z)$ и $G^- \subset \varphi(z)^- = \varphi(z)$. Итак, $e \leq z$, $e = \vee e_i$. $\square$

Вторую часть этого параграфа мы посвятим исследованию регулярных множеств в топологическом пространстве. Мы построим из них две (изоморфные) полные б.а, не сводящиеся к алгебрам множеств.

10.3. Пусть T – топологическое пространство. Открытое множество U (соотв. замкнутое множество F) называется *регулярным*, если $U = U^{-\circ}$ (соотв. $F = F^{\circ-}$). Здесь $^-$) – оператор замыкания, $^\circ$) – оператор внутренности. Семейство всех регулярных открытых множеств обозначим через $\mathcal{U}$, семейство всех регулярных замкнутых множеств обозначим через $\mathcal{F}$. В следующем предложении приведем основные и легко проверяемые свойства операторов замыкания и внутренности.

10.4. Предложение. *Пусть* $A, B \subset T$. *Тогда*
1) *операторы* $^-$), $^\circ$) *идемпотентны;* 2) $\emptyset^- = \emptyset$, $T^\circ = T$;
3) $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; 4) $A^\circ \subseteq A \subseteq A^-$.

В частности из 3) следует, что $^-$) и $^\circ$) являются неубывающими операторами: $A \subseteq B \Rightarrow A^- \subseteq B^-$, $A^\circ \subseteq B^\circ$. Обозначим $A^c = T \backslash A$.

10.5. Лемма. *Пусть* $A \subset T$. *Тогда*

1) $A^{-\circ-\circ} = A^{-\circ}$, $A^{\circ-\circ-} = A^{\circ-}$; 2) $A^- = A^{c\circ c}$, $A^\circ = A^{c-c}$.

Доказательство. 1). Из $A^{-\circ} \subseteq (A^{-\circ})^-$ следует $A^{-\circ} = A^{-\circ\circ} \subseteq A^{-\circ-\circ}$. Из $A^{-\circ} \subseteq A^-$ следует $A^{-\circ-} \subseteq A^-$, $A^{-\circ-\circ} \subseteq A^{-\circ}$. Аналогично, $(A^{\circ-})^\circ \subseteq A^{\circ-}$ влечет $A^{\circ-\circ-} \subseteq A^{\circ-}$, а включение $A^\circ \subseteq A^{\circ-}$ дает $A^\circ = A^{\circ\circ} \subseteq A^{\circ-\circ}$, $A^{\circ-} \subseteq A^{\circ-\circ-}$.

2). Включение $A \subseteq A^-$ влечет $A^c \supseteq A^{-c}$, $A^{c\circ} \supseteq A^{-c\circ} = A^{-c}$ поскольку A^{-c} является открытым множеством. С другой стороны, из $A^{c\circ} \subseteq A^c$ следует, что $A^{c\circ c} \supseteq A$. Так как $A^{c\circ c}$ замкнуто, то $A^{c\circ c} \supseteq A^-$ или $A^{c\circ} \subseteq A^{-c}$. Итак, $A^{c\circ} = A^-$, $A^- = A^{c\circ c}$, $(A^c)^\circ = (A^c)^{c-c}$. $\square$

Лемма 10.5. показывает, что из множества A, чередуя операторы $^{-}), ^{\circ})$ можно получить (включая A) не более 7 множеств: $\{A, A^{\circ}, A^{-}, A^{\circ-}, A^{-\circ}A^{\circ-\circ}, A^{-\circ-}\}$. При этом $A^{-\circ}, A^{\circ-\circ} \in \mathcal{U}$, а $A^{\circ-}, A^{-\circ-} \in \mathcal{F}$.

10.6. Лемма. *Пусть U – открытое, F – замкнутое множества в топологическом пространстве T. Тогда для любых подмножеств A, B в T справедливы утверждения:*

1) $A^{-}\backslash B^{-} \subseteq (A\backslash B)^{-}$, 2) $(U \cap A)^{-} = (U \cap A^{-})^{-}$, 3) $(F \cup B^{\circ})^{\circ} = (F \cup B)^{\circ}$.

Доказательство. 1). В силу леммы 10.5. $A^{-}\backslash B^{-} = A^{-} \cap B^{-c} = A^{-} \cap (B^{c\circ c})^{c} = A^{-} \cap B^{c\circ}$. Через $U(a)$ будем обозначать окрестность точки a. По определению замыкания

$$a \in A^{-} \Leftrightarrow \forall U(a)\ (U(a) \cap A \neq \emptyset). \tag{3}$$

Пусть $z \in A^{-} \cap B^{c\circ}$. Так как $z \in B^{c\circ}$, а множество $B^{c\circ}$ открыто, то $B^{c\circ}$ является окрестностью точки z. Пусть $U(z)$ – произвольная окрестность точки z. Тогда множество $U(z) \cap B^{c\circ}$ также является окрестностью z. Так как $z \in A^{-}$, то в силу (3) имеем $\emptyset \neq (U(z) \cap B^{c\circ}) \cap A \subseteq U(z) \cap (B^{c} \cap A) = U(z) \cap (A\backslash B)$. Снова в силу (3) $z \in (A\backslash B)^{-}$.

2). Так как $U \cap A \subseteq U \cap A^{-}$, то $(U \cap A)^{-} \subseteq (U \cap A^{-})^{-}$. В силу леммы 10.5. $U = U^{\circ} = U^{c-c}$ и используя первое утверждение доказываемой леммы, получим

$$U \cap A^{-} = U^{c-c} \cap A^{-} = A^{-}\backslash U^{c-} \subseteq (A\backslash U^{c})^{-} = (A \cap U)^{-}. \tag{4}$$

Значит $(U \cap A^{-})^{-} \subseteq (A \cap U)^{-}$ и 2) доказано.

3). В силу леммы 10.5. и доказанного пункта 2) настоящей леммы, имеем $(F \cup B^{\circ})^{\circ} = (F \cup B^{c-c})^{c-c} = (F^{c} \cap B^{c-})^{-c} = (F^{c} \cap B^{c})^{-c} = (F \cup B)^{c-c} = (F \cup B)^{\circ}$.$\square$

10.7. Предложение. *Справедливы утверждения:*

1) $U \in \mathcal{U} \Leftrightarrow U^{c} \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow F^{c} \in \mathcal{U}$;

2) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-} \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^{\circ} \in \mathcal{U}$;

3) $U_i \in \mathcal{U}, F_i \in \mathcal{F} (i = 1, ..., n) \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{U}, F_1 \cup ... \cup F_n \in \mathcal{F}$;

Доказательство. 1). Пусть $U \in \mathcal{U}$. Тогда в силу леммы 10.5. $U^{c\circ-} = U^{--} = (U^-)^{c-} = U^{-\circ c} = U^c$. Если $U^c \in \mathcal{F}$, то $U^c = U^{c\circ-} = U^{-c-}$ или $U = U^{-c-c} = U^{-\circ}$.

2). Пусть $U \in \mathcal{U}, F \in \mathcal{F}$. Тогда $(U^-)^{\circ-} = (U^{-\circ})^- = U^-,\ (F^\circ)^{-\circ} = (F^{\circ-})^\circ = F^\circ$.

3). Достаточно доказать для $n = 2$. Из включений $U_1 \cap U_2 \subseteq U_i (i = 1, 2)$ следует, что $(U_1 \cap U_2)^{-\circ} \subseteq U_i^{-\circ} = U_i,\ (U_1 \cap U_2)^{-\circ} \subseteq (U_1 \cap U_2)$. С другой стороны, $U_1 \cap U_2 \subseteq (U_1 \cap U_2)^-$, а так как множество $U_1 \cap U_2$ открыто, то $U_1 \cap U_2 \subseteq (U_1 \cap U_2)^{-\circ}$. Итак, $U_1 \cap U_2 = (U_1 \cap U_2)^{-\circ}$. Аналогично, из $F_i \subseteq F_1 \cup F_2 (i = 1, 2)$ следует $F_i = F_i^{\circ-} \subseteq (F_1 \cup F_2)^{\circ-},\ F_1 \cup F_2 \subseteq (F_1 \cup F_2)^{\circ-}$. Далее $(F_1 \cup F_2)^\circ \subseteq F_1 \cup F_2$ и так как $F_1 \cup F_2$ замкнуто, то $(F_1 \cup F_2)^{\circ-} \subseteq F_1 \cup F_2$. Следовательно, $(F_1 \cup F_2)^{\circ-} = F_1 \cup F_2$. $\Box$

10.8. Множество N в топологическом пространстве T называется *нигде не плотным*, если $N^{-\circ} = \emptyset$. Семейство $\mathcal{N}$ всех нигде не плотных подмножеств T является идеалом в б.а $\mathcal{P}(T)$ всех подмножеств T. Действительно, наследственность $\mathcal{N}$ очевидна. Если же $N_i \in \mathcal{N}(i = 1, 2)$, то в силу леммы 10.5. $(N_1 \cup N_2)^{-\circ} = (N_1^- \cup N_2^-)^{c-c} = (N_1^{-c} \cap N_2^{-c})^{-c} = (N_1^{-c} \cap N_2^{-c-})^{-c} = (N_1^- \cup N_2^{-c-c})^{c-c} = (N_1^- \cup N_2^{-\circ})^{c-c} = N_1^{-c-c} = N_1^{-\circ} = \emptyset$. Здесь в третьем равенстве мы использовали равенство 2) леммы 10.6, взяв в качестве $U = N_1^{-c}$ и $A = N_2^{-c}$.

Покажем, что $\mathcal{N} \cap \mathcal{U} = \mathcal{N} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset\}$. Действительно, если открытое множество $U \neq \emptyset$, то в силу включения $U \subset U^{-\circ}$ следует $U \notin \mathcal{N}$. Если же $F \in \mathcal{N} \cap \mathcal{F}$, то $\emptyset = F^{-\circ} = (F^{\circ-})^{-\circ} = F^{\circ-\circ} \supset F^\circ$. Следовательно, $F^\circ = \emptyset,\ F = F^{\circ-} = \emptyset$.

Говорят, что множество A *эквивалентно* множеству B $(A \sim B)$ по идеалу $\mathcal{N}$, если $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{N}$. Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично, а в силу включения $A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$, оно транзитивно. Покажем, что если $U \in \mathcal{U},\ F \in \mathcal{F}$, то $U^- \sim U,\ F \sim F^\circ$. Действительно, множество $U^-\Delta U = U^- \backslash U = U^- \cap U^c$ замкнуто. Поэтому $(U^-\Delta U)^{-\circ} = (U^- \cap U^c)^\circ = U^{-\circ} \cap U^{c\circ} = U \cap U^{c\circ} = U \cap U^{-c} \subseteq U^- \cap U^{-c} = \emptyset$.

Аналогично, множество $F\Delta F^\circ = F\backslash F^\circ = F\cap F^{\circ c}$ замкнуто и $(F\Delta F^\circ)^{-\circ} = (F\cap F^{\circ c})^\circ = F^\circ \cap F^{\circ c\circ} = F^\circ\cap (F^\circ)^{c\circ} = F^\circ \cap F^{\circ - c} = F^\circ\cap F^c \subseteq F\cap F^c = \emptyset$.

10.9. Примером нигде не плотного множества является *канторовское* множество $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ на отрезке $[0;\ 1]$. Множество F_1 получено из $[0;\ 1]$ выбрасыванием серединного интервала $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$: $F_1 = [0;\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3};1]$. Множество F_2 – выбрасыванием из F_1 двух соответствующих серединных интервалов: $F_2 = [0;\frac{1}{3^2}]\cup[\frac{2}{3^2};\frac{3}{3^2}]\cup[\frac{6}{3^2};\frac{7}{3^2}]\cup[\frac{8}{3^2};\frac{9}{3^2}]$ и так далее. Таким образом,

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n}\left[\frac{a_k}{3^n};\frac{a_k+1}{3^n}\right],$$

где числа $\{a_k : k = 1,...,2^n\}\equiv J_n$ содержатся в множестве $\{0,1,...,3^n-1\}$.

Множество $\mathcal{C}$ замкнуто (так как все множества F_n замкнуты) и значит компактно. Оно имеет меру $\mu(\mathcal{C}) = 0$ так как $\mu(\mathcal{C})\le\mu(F_n) = (\frac{2}{3})^n$. Следовательно, $\mathcal{C}$ не может содержать никакой интервал $(a;b), b>a$ и значит $\mathcal{C}^{-\circ}=\emptyset$. Множество $\mathcal{C}$ несчетно, так как любое число $x\in\mathcal{C}$ представимо в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{3^k},\ \ x_k\in\{0,2\}.$$

Покажем, что $\mathcal{C}$ не имеет изолированных точек: для любого $x\in\mathcal{C}$ и любой $U(x)$ окрестности этой точки $(U(x)\backslash\{x\})\cap\mathcal{C}\neq\emptyset$. Действительно, пусть $U(x) = (x-\varepsilon;x+\varepsilon)$ и число n такое, что $\frac{1}{3^n}<\varepsilon$. Так как $x\in F_n$, то существует $k\in\{1,2,...,2^n\}$ такое, что $x\in[\frac{a_k}{3^n};\frac{a_k+1}{3^n}]$. В силу неравенства $\varepsilon>\frac{1}{3^n}$ имеем $\frac{a_k}{3^n}\in U(x)$, $\frac{a_k+1}{3^n}\in U(x)$. Но при любом n числа $\frac{a_k}{3^n}$, $\frac{a_k+1}{3^n}$ лежат в $\mathcal{C}$. Следовательно, любая окрестность $U(x)$ содержит точку из $\mathcal{C}$ отличную от x. Если обозначить через A' множество всех предельных точек множества A, то для канторовского множества мы получили $\mathcal{C}'=\mathcal{C}$. (множества с таким свойством в топологическом пространстве называются *совершенными*).

Множество $\mathcal{C}$ с индуцированной из $\mathbf{R}$ топологией $\tau_{\mathcal{C}}$ является вполне несвязным отделимым компактом. Семейство множеств

$$\left[\frac{a_k}{3^n};\frac{a_k+1}{3^n}\right]\cap\mathcal{C}, a_k\in J_n, n\in\mathbf{N}$$

является базой $\tau_{\mathcal{C}}$, состоящей из открыто-замкнутых множеств. Действительно, существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\left[\frac{a_k}{3^n}; \frac{a_k+1}{3^n}\right] \cap \mathcal{C} = \left(\frac{a_k}{3^n} - \varepsilon; \frac{a_k+1}{3^n} + \varepsilon\right) \cap \mathcal{C}$ и поэтому эти множества открыто-замкнуты в $\tau_{\mathcal{C}}$. Далее пусть $x \in \mathcal{C}$ и $U(x) = (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \cap \mathcal{C}, \varepsilon > 0$ – произвольная окрестность этой точки в топологии $\tau_{\mathcal{C}}$. Пусть n такое, что $\frac{1}{3^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а число $k \in J_n$ такое, что $x \in \left[\frac{a_k}{3^n}; \frac{a_k+1}{3^n}\right]$. Тогда $\left[\frac{a_k}{3^n}; \frac{a_k+1}{3^n}\right] \cap \mathcal{C} \subset U(x)$.

Таким образом, $(\mathcal{C}, \tau_{\mathcal{C}})$ является пространством Стоуна булевой алгебры всех открыто-замкнутых подмножеств $CO((\mathcal{C}, \tau_{\mathcal{C}})$.

10.10. Теорема. *В упорядоченном по включению множестве* $\mathcal{U}$ *положим* $U' = U^{c\circ}$. *Тогда* $(\mathcal{U}, \subseteq, {}', \emptyset, T)$ *есть полная булева алгебра.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\} \subseteq \mathcal{U}$. Покажем, что $\vee U_i = (\cup U_i)^{-\circ}$. Действительно, $U_j \subseteq \cup U_i$ влечет $U_j = U_j^{-\circ} \subseteq (\cup U_i)^{-\circ}$. Следовательно, $(\cup U_i)^{-\circ}$ есть верхняя граница для семейства $\{U_i\}$. Если $Z \in \mathcal{U}$ и $Z \supseteq U_i$ для всех i, то $Z \supseteq \cup U_i$. Значит $Z = Z^{-\circ} \supseteq (\cup U_i)^{-\circ}$ и $(\cup U_i)^{-\circ}$ есть наименьшая верхняя граница для семейства $\{U_i\}$. Аналогично доказывается $\wedge U_i = (\cap U_i)^{-\circ}$. Заметим также, что в силу 3) предложения 10.7, для любого конечного семейства $\{U_i : i = 1, 2, ..., n\}$ справедливо $U_1 \wedge ... \wedge U_n = U_1 \cap ... \cap U_n$.

Итак, $\mathcal{U}$ – полная решетка. Покажем, что в $\mathcal{U}$ выполнена аксиома дистрибутивности D1: $U_1 \wedge (U_2 \vee U_3) = (U_1 \wedge U_2) \vee (U_1 \wedge U_3)$. Достаточно установить включение $U_1 \wedge (U_2 \vee U_3) \subseteq (U_1 \wedge U_2) \vee (U_1 \wedge U_3)$, которое равносильно следующему: $U_1 \cap (U_2 \cup U_3)^{-\circ} \subseteq [(U_1 \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_3)]^{-\circ} = [(U_1 \cap (U_2 \cup U_3)]^{-\circ}$. Так как $U_1 \cap (U_2 \cup U_3)^{-\circ} = [(U_1 \cap (U_2 \cup U_3)^{-}]^{\circ}$, то достаточно проверить, что $U_1 \cap (U_2 \cup U_3)^{-} \subseteq [(U_1 \cap (U_2 \cup U_3)]^{-}$. Но включение такого вида было установлено в доказательстве второго утверждения леммы 10.6 (см. (4); в нем надо положить $U = U_1$ и $A = U_2 \cup U_3$).

Покажем, что множество $U^{c\circ}$ является дополнением к U. В самом деле, с учетом предложения 10.7, $U \wedge U^{c\circ} = U \cap U^{c\circ} \subseteq U \cap U^{c} = \emptyset$; $U \vee U^{c\circ} = (U \cup U^{c\circ})^{-\circ} = (U^{-} \cup U^{c\circ -})^{\circ} = [(U^{c})^{\circ -} \cup U^{-}]^{\circ} = [U^{c} \cup U^{-}]^{\circ} \supseteq T^{\circ} = T$. Итак, $\mathcal{U}$ булева алгебра. $\square$

10.11. Теорема. *В упорядоченном по включению множестве* $\mathcal{F}$ *положим* $F' = F^{c-}$. *Тогда* $(\mathcal{F}, \subseteq, ', \emptyset, T)$ *есть полная булева алгебра, изоморфная булевой алгебре* $\mathcal{U}$. *Изоморфизм осуществляют отображения* $\varphi(U) = U^{-}$, $\varphi^{-1}(F) = F^{\circ}$ $(U \in \mathcal{U}, F \in \mathcal{F})$.

Доказательство. Как в теореме 10.10 показывается, что $\vee F_i = (\cup F_i)^{\circ -}$ и $\wedge F_i = (\cap F_i)^{\circ -}$. В силу 3) предложения 10.7, для любого конечного семейства $\{F_i : i = 1, 2, ..., n\}$ справедливо $F_1 \vee ... \vee F_n = F_1 \cup ... \cup F_n$.

Таким образом, $\mathcal{F}$ – полная решетка. Покажем, что $U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow \varphi(U_1) \subseteq \varphi(U_2)$ (отсюда, в частности следует инъективность φ). Действительно, $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^{-} \subseteq U_2^{-}$. Обратно, если $U_1^{-} \subseteq U_2^{-}$, то $U_1 = U_1^{-\circ} \subseteq U_2^{-\circ} = U_2$. Если $F \in \mathcal{F}$, то в силу предложения 10.7 $F^{\circ} \in \mathcal{U}$ и $\varphi(F^{\circ}) = F^{\circ -} = F$. Это означает, что φ является биекцией. Поскольку порядковый изоморфизм решеток сохраняет операции $\vee$, $\wedge$, то $\mathcal{F}$ дистрибутивна.

Наконец установим, что множество F^{c-} является дополнением к F. В силу предложения 10.7, $F \wedge F^{c-} = (F \cap F^{c-})^{\circ -} = (F^{\circ} \cap F^{c-\circ})^{-} = (F^{\circ} \cap F^{c})^{-} = \emptyset$; $F \vee F^{c-} = F \cup F^{c-} = (F \cup F^{c})^{-} = T$.

Итак, $\mathcal{F}$ полная булева алгебра изоморфная $\mathcal{U}$. $\square$

34°. Обозначим $G(A) = \{A, A^{\circ}, A^{-}, A^{\circ -}, A^{-\circ}, A^{\circ - \circ}, A^{-\circ -}\}$. Постройте на прямой множества A_k, для которых $\operatorname{card} G(A_k) = k$ $(k = 1, 2, ..., 7)$.

35°. Найдите $\min \operatorname{card} T$, где минимум берется по всем топологическим пространствам T, в которых найдется множество A, имеющее $\operatorname{card} G(A) = 7$.

§11. Операции над булевыми алгебрами

11.1. Главный идеал X_a в б.а X можно рассматривать как б.а, в которой операции $\vee$, $\wedge$, индуцируются из X, а дополнение к $b \in X_a$ задается формулой $b^{\theta} = b' \wedge a$. Единицей в X_a является элемент a и $b \vee b^{\theta} = a$ (см. 26°).

11.2. Подалгебры. Часть E б.а X называется *булевой подалгеброй* (или короче *подалгеброй*), если $\forall a, b \in E$ $(a \vee b, a' \in E)$. Очевидно, что пересечение любого семейства подалгебр снова подалгебра. Поэтому для любой части $Y \subset X$ существует наименьшая подалгебра $a(Y)$, содержащая Y. Элементы из Y называются *образующими* подалгебры $a(Y)$.

Обозначим $Y' = \{a' : a \in Y\}$, $Y^{\vee} = \{\vee_{i=1}^{n} a_i : a_i \in Y, n \in \mathbf{N}\}$, $Y^{\wedge} = \{\wedge_{i=1}^{n} a_i : a_i \in Y, n \in \mathbf{N}\}$. Отправляясь от множества Y, достаточно трех последовательных расширений множества Y, чтобы получить подалгебру $a(Y)$:

11.3. Предложение. $a(Y) = (Y \cup Y')^{\wedge\vee}$.

Доказательство. Любой элемент $z \in (Y \cup Y')^{\wedge\vee}$ имеет вид

$$z = \bigvee_{i=1}^{s} (\bigwedge_{j=1}^{r_i} y_{i,j}), \tag{5}$$

где $y_{i,j} \in Y \cup Y'$, $s, r_i \in \mathbf{N}$. Поэтому точная верхняя граница элементов вида (5) имеет такой же вид. Используя дистрибутивность, получим $z' = \bigwedge_{i=1}^{s} (\bigvee_{j=1}^{r_i} y'_{i,j}) = \bigvee_{j_1=1}^{r_1} \bigvee_{j_2=1}^{r_2} \ldots \bigvee_{j_s=1}^{r_s} (y'_{1,j_1} \wedge y'_{2,j_2} \ldots \wedge y'_{s,j_s})$. Поскольку элементы $y'_{1,j_1}, y'_{2,j_2}, \ldots, y'_{s,j_s} \in Y \cup Y'$, то $z' \in (Y \cup Y')^{\wedge\vee}$. Итак, $(Y \cup Y')^{\wedge\vee}$ является подалгеброй, содержащей Y и, следовательно, $(Y \cup Y')^{\wedge\vee} \supset a(Y)$. Обратно, если E подалгебра и $E \supset Y$, то E содержит любой элемент z вида (5).$\square$

11.4. Следствие. *Подмножество Y - конечно (соотв. счетно) $\Leftrightarrow$ $a(Y)$ - конечно (соотв. счетно)*

11.5. Простейшие подалгебры вида $a(Y)$ получаются, если подмножество $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ образует *разбиение единицы*: $y_i \wedge y_j = 0 (i \neq j), \vee_{i=1}^{n} y_i = 1$. Тогда $a(Y) = \{\bigvee_{j \in J} y_j : J \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Действительно, в этом случае $(\bigvee_{j \in J} y_j)' = \bigvee_{j \in J^c} y_j$, где $J^c = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J$. Значит каждый элемент $a(Y)$ задается некоторым подмножеством $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и поэтому $\operatorname{card} a(Y) = 2^{\operatorname{card} Y}$. Мы покажем, что любая конечная б.а порождается некоторым разбиением единицы.

Атомом булевой алгебры X называется любой ее ненулевой минимальный элемент. Ясно, что любые два атома дизъюнктны.

11.6. Предложение. *Пусть невырожденная булева алгебра X конечна. Тогда существует разбиение единицы $Y \subset X$, состоящее из атомов X, и такое, что $X = a(Y)$.*

Доказательство. Так как X невырождена, то $\exists a \in X (0 < a < 1)$. В силу конечности X существует атом $a_1 \leq a$. Тогда $0 < a_1' < 1$ и в нем найдется атом $a_2 \leq a_1'$. Если $a_1 \vee a_2 = 1$, то разбиение $Y = \{a_1, a_2\}$ построено. Если $a_1 \vee a_2 < 1$, то найдется атом $a_3 \leq (a_1 \vee a_2)'$ и так далее. Так как ба X конечна, то этот процесс через конечное число шагов завершится. Итак, построено разбиение единицы $Y = \{a_1, ..., a_n\}$, состоящее из атомов X. Покажем, что $X = a(Y)$. Пусть $x \in X$. Тогда $x = x \wedge 1 = x \wedge (\vee_{i=1}^n a_i) = \vee_{i=1}^n (a_i \wedge x)$. Так как a_i - атомы, то $a_i \wedge x = 0$ или $a_i \wedge x = a_i$. Поэтому существует подмножество $J \subset \{1, ..., n\}$ такое, что $x = \bigvee\limits_{j \in J} a_j \in a(Y)$.$\square$

11.7. Следствие. *Любые две конечные булевы алгебры одинаковой мощности изоморфны.*

11.8. Фактор-алгебры. Пусть X – б.а, I – собственный идеал. Тогда отношение $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| \in I$ является отношением эквивалентности на X. Это следует из свойств симметрической разности (следствие 8.4). Приведем другие свойства этого отношения:

11.9. Предложение.*Пусть $x, y, z, a, b \in X$. Справедливы утверждения:*

1) $x \sim a,\ y \sim b \Rightarrow x' \sim a',\ x \vee y \sim a \vee b,\ x \wedge y \sim a \wedge b$;

2) $x \leq z \leq y,\ x \sim y \Rightarrow z \sim x$;

3) $a \sim x,\ x \leq y \Rightarrow \exists b \geq a\, (b \sim y)$;

4) $x \leq y,\ y \sim b \Rightarrow \exists a \leq b\, (a \sim x)$;

5) $z \sim x \vee y \Leftrightarrow \exists a \sim x\ \exists b \sim y\ (z = a \vee b)$;

6) $z \sim x \wedge y \Leftrightarrow \exists a \sim x\ \exists b \sim y\ (z = a \wedge b)$.

Доказательство. 1) Следует из следствия 8.4 пункт 1 и 6.

2) В силу 1) $x = x \wedge z \sim y \wedge z = z$.

3) Положим $b = y \vee a$; тогда $b = y \vee a \sim y \vee x = y$ в силу 1).

4) Положим $a = b \wedge x$; тогда $a = b \wedge x \sim y \wedge x = x$ в силу 1).

5) Положим $a = x \wedge z, b = (z \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)')$. Тогда в силу дистрибутивности $a \vee b = (x \wedge z) \vee (z \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)') = [z \wedge (x \vee y)] \vee [z \wedge (x \vee y)'] = z \wedge 1 = z$. Далее $|x - a| = x \wedge z' \leq (x \vee y) \wedge z' \leq |x \vee y - z| \in I$. Аналогично, $|b - y| = (y \wedge z') \vee (z \wedge (x \vee y)') \leq [z' \wedge (x \vee y)] \vee [z \wedge (x \vee y)'] = |x \vee y - z| \in I$. Обратное утверждение следует из 1).

6) Надо положить $a = x \vee z,\ b = (z \vee y) \wedge (z \vee (x \wedge y)')$. $\square$

11.10. В фактор-множестве $\tilde{X} = X/I$ всех классов эквивалентности $\tilde{x} = \{a \in X : a \sim x\}$ введем алгебраические операции

$$\tilde{x} \vee \tilde{y} = (x \vee y)^{\sim};\ \ \tilde{x} \wedge \tilde{y} = (x \wedge y)^{\sim};\ \ (\tilde{x})' = (x')^{\sim}.$$

В силу предложения 11.9 эти операции заданы корректно. Нетрудно видеть, что выполняются аксиомы a1) – a4) и по теореме 6.9 $\tilde{X}$ является ба, в которой нулем является I, а единицей $I' = \{a' : a \in I\}$. Выясним как порядок в $\tilde{X}$ связан с порядком в исходной ба X.

11.11. Предложение. *Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Тогда*

$$\tilde{x} \leq \tilde{y} \ \Leftrightarrow\ \exists\, a \in \tilde{x}\ \exists\, b \in \tilde{y}\ (a \leq b).$$

Доказательство. По определению порядка имеем $\tilde{x} \leq \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{x} \vee \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{x} \wedge \tilde{y}$. Учитывая, что $\tilde{x} \wedge \tilde{y} = (x \wedge y)^{\sim}$, имеем $|x - x \wedge y| = x \wedge (x \wedge y') = x \wedge y' \in I$. Возьмем $a = x \wedge y$, $b = y$. Тогда $a \leq b$ и $|a - x| = x \wedge y' \in I$, что означает $a \sim x, b = y \sim y$. Обратно, в силу 1) из предложения 8.9 $a = a \wedge b \sim x \wedge y; \tilde{a} = \tilde{x} = (x \wedge y)^{\sim} = \tilde{x} \wedge \tilde{y}$. Следовательно, $\tilde{x} \leq \tilde{y}$.$\square$

11.12. Определим пространство Стоуна фактор-алгебры X/I через пространство Стоуна Q исходной ба X. Пусть $\varphi : X \to CO(Q)$ стоуновский изоморфизм. Так как множество $\varphi(x)$ – открыто-замкнуто, то $\bigcup\limits_{x \in I} \varphi(x)$ открыто, а множество $P = \bigcap\limits_{x \in I} \varphi(x')$ замкнуто. Следовательно, P является вполне несвязным компактом. Заметим, что $z \in I \Leftrightarrow \varphi(z) \subset Q \backslash P \Leftrightarrow \varphi(z) \cap P = \emptyset$.

Действительно, $\varphi(z)$ замкнуто, то $\varphi(z)$ компакт. Условие $\varphi(z) \subset \bigcup\limits_{x\in I} \varphi(x)$ означает, что $\{\varphi(x) : x \in I\}$ является открытым покрытием $\varphi(z)$. Выделим конечное подпокрытие: $\varphi(z) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$. Тогда $\varphi(z) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i \wedge z) = \varphi(z \wedge \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i)$. Так как $x_i \in I$, то $z \wedge \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i \in I$. Поскольку отображение $\psi(\tilde{x}) = \varphi(x) \cap P$ является изоморфизмом фактор-алгебры X/I на алгебру всех открыто-замкнутых подмножеств множества P, то как раз P и является пространством Стоуна фактор-алгебры X/I.

11.13. *Границей* подмножества A топологического пространства T называется множество $b(A) = A^-\backslash A^\circ = A^- \cap A^{c-}$. Отметим, что $b(A) = b(A^c)$ и $b(A\cup B) \subseteq b(A)\cup b(B)$. Следовательно, множество $\mathcal{A} = \{A \subset T : b(A) \in \mathcal{N}\}$, где $\mathcal{N}$ – идеал нигде не плотных подмножеств, является алгеброй множеств. Очевидно, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$.

Покажем, что фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ изоморфна каждой из ба регулярных открытых $\mathcal{U}$ или замкнутых множеств $\mathcal{F}$. Заметим, что если $A \in \mathcal{A}$, то в силу включений $b(A^-) \subset b(A)$, $b(A^\circ) \subset b(A)$ имеем $A^-, A^\circ \in \mathcal{A}$ и $A \sim A^- \sim A^\circ$. Значит $A \sim A^{-\circ} \in \mathcal{U}$, $A \sim A^{\circ-} \in \mathcal{F}$. Тогда искомые изоморфизмы $\varphi_1 : \mathcal{A}/\mathcal{N} \to \mathcal{U}$ и $\varphi_2 : \mathcal{A}/\mathcal{N} \to \mathcal{F}$ задаются равенствами $\varphi_1(\tilde{A}) = A^{-\circ}$, $\varphi_2(\tilde{A}) = A^{\circ-}$.

Проверим, например, корректность этих формул: $A \sim B \Rightarrow A^{-\circ} = B^{-\circ}$, $A^{\circ-} = B^{\circ-}$. Используя леммы 10.5, 10.6, получим $A^{-\circ}\backslash B^{-\circ} = A^{-\circ} \cap B^{-\circ c} = A^{-\circ} \cap B^{-c-} = A^{-\circ} \cap B^{c\circ-} \subset (A^{-\circ} \cap B^{c\circ-})^- = (A^{-\circ} \cap B^{c\circ})^- = (A^- \cap B^c)^{\circ-} \subset [(b(A) \cup A) \cap B^c]^{\circ-}$. Так как $A \cap B^c, b(A) \in \mathcal{N}$, а $\mathcal{N}$ – идеал, то множество $N = (b(A) \cup A) \cap B^c \in \mathcal{N}$. Следовательно, $A^{-\circ}\backslash B^{-\circ} \subset N^{\circ-} \subset (N^-)^{\circ-} = \emptyset$. Аналогично, $B^{-\circ}\backslash A^{-\circ} = \emptyset$ и, следовательно, $A^{-\circ} = B^{-\circ}$.

Для доказательства второго равенства также воспользуемся леммами 10.5, 10.6. Имеем $A^{\circ-}\backslash B^{\circ-} = A^{\circ-} \cap B^{\circ-} = A^{\circ-} \cap B^{\circ c\circ} = A^{\circ-} \cap B^{c-\circ} \subset (A^{\circ-} \cap B^{c-\circ})^- = (A^\circ \cap B^{c-\circ})^- = (A \cap B^{c-})^{\circ-} \subset (A \cap (b(B^c) \cup B^c))^{\circ-}$. Так как $A \cap B^c, A \cap b(B^c) \in \mathcal{N}$, то множество $M = A \cap (b(B^c) \cup B^c) \in \mathcal{N}$. Следовательно, $A^{\circ-}\backslash B^{\circ-} \subset M^{\circ-} \subset (M^-)^{\circ-} = \emptyset$. Аналогично, $B^{\circ-}\backslash A^{\circ-} = \emptyset$. Итак, $A^{\circ-} =$

$B^{\circ-}$. В частности, если $b(A) \in \mathcal{N}$, то $A^{-\circ} = A^{\circ-\circ}$, $A^{\circ-} = A^{-\circ-}$.$\square$

11.14. Важный пример фактор-алгебры возникает, когда мы рассматриваем пространство с мерой. *Пространством с мерой* называется тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, где Ω – множество, $\mathfrak{A}$ – алгебра подмножеств множества Ω (см. 6.10, пример 2)), а *мера* μ есть отображение $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ такое, что для любых $A, B \in \mathfrak{A}$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$$

(это свойство меры называется *аддитивностью*). Пространство с мерой называется *полным*, если $B \subset A \in \mathfrak{A}$, $\mu A = 0$ влечет $B \in \mathfrak{A}$.

Так тройка $(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \mu)$, где $L(\mathbb{R})$ – алгебра измеримых по Лебегу множеств на прямой, а μ – мера Лебега (мера промежутка $\mu(< a, b >) = b - a$) является типичным примером полного пространства с мерой. На самом деле, $L(\mathbb{R})$ является σ-алгеброй, а μ – σ-аддитивной мерой, но в данной книге мы не рассматриваем эти свойства.

Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{A}_0 = \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = 0\}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ является булевой алгеброй, состоящей из классов почти совпадающих подмножеств из $\mathfrak{A}$ с одинаковой мерой (множества A, B почти совпадают, если $\mu(A\Delta B) = 0$).

11.15. Прямая сумма булевых алгебр. Пусть $X_t, t \in T$ – семейство б.а. В декартовом произведении $X = \prod\limits_{t \in T} X_t$ (элементы которого мы будем называть *векторами*) введем (покоординатные) алгебраические операции:

$$(x_t) \vee (y_t) = (x_t \vee y_t), \ (x_t) \wedge (y_t) = (x_t \wedge y_t), \ (x_t)' = (x_t').$$

Тогда по теореме 6.9 X является б.а, в которой $(x_t) \leq (y_t) \Leftrightarrow \forall t \in T(x_t \leq y_t)$, $0 = (0_t)$, $1 = (1_t)$. Эта б.а называется *прямой суммой (объединением)* б.а X_t и обозначается $X = \bigoplus\limits_{t \in T} X_t$. Пусть $s \in T$ и $x(s) \in X$ такой вектор, у которого s-тая координата равна 1_s, а на остальных местах стоят нули. Тогда X_s изоморфна главному идеалу $X_{x(s)}$ ба X. Очевидно, что множество $U = \{x(s) : s \in T\}$ является дизъюнктным и $U^d = \{0\}$.

Обратно, пусть X – произвольная б.а, в которой существует дизъюнктное подмножество U такое, что $U^d = \{0\}$. Тогда 1 дизъюнктна к U^d, то есть $1 \in U^{dd}$ и $1' = 0 \in U^d$. По лемме 9.3 $\sup U = 1$. Далее $x = x \wedge 1 = x \wedge \sup U = \sup(x \wedge U) = \bigvee\limits_{u \in U} (x \wedge u)$, в силу обобщенного закона дистрибутивности D3. Поставив элементу x в соответствие вектор $(x \wedge u)_{u \in U}$, мы зададим отображение $\psi : X \to \bigoplus\limits_{u \in U} X_u$ б.а X в прямую сумму своих главных идеалов. Это отображение является изоморфизмом: $\psi(x \vee y) = ((x \vee y) \wedge u)_{u \in U} = ((x \wedge u)_{u \in U} \vee ((y \wedge u)_{u \in U} = \psi(x) \vee \psi(y)$; $\psi(x') = (x' \wedge u)_{u \in U} = (\psi(x))'$; если же $\psi(x) = 0$, то $x \wedge u = 0$ для всех $u \in U$ и значит $0 = \bigvee\limits_{u \in U} (x \wedge u) = x$. Например, множество $U = \{a, a'\}$ имеет $U^d = \{0\}$, так как $x \wedge a = 0, x \wedge a' = 0$ влекут $0 = (x \wedge a) \vee (x \wedge a') = x$. Поэтому X изоморфна $X_a \bigoplus X_{a'}$.

35°. Пусть E – подалгебра булевой алгебры X и $z \notin E$. Тогда $a(E \cup \{z\}) = \{(x \wedge z) \vee (y \wedge z') : x, y \in E\}$.

36°. Пусть I – идеал в б.а X. Тогда $a(I) = I \cup I'$. Если идеал I максимален, то $a(I) = X$.

§12. Гомоморфизмы и булевы произведения

12.1. Пусть X, Y – б.а. Отображение $h : X \to Y$ называется *гомоморфизмом*, если для любых $a, b \in X$

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b), \;\; h(a) \wedge h(b) = h(a) \wedge h(b), \;\; h(a)' = h(a)'$$

Заметим, что $h(0) = h(a \wedge a') = h(a) \wedge h(a)' = 0$, $h(1) = h(a \vee a') = h(a) \vee h(a)' = 1$. Следовательно, образ $h(X)$ является подалгеброй б.а Y. Инъективный гомоморфизм ($h(a) = h(b) \Leftrightarrow a = b$) является изоморфизмом б.а X на $h(X)$. Инъективность гомоморфизма равносильна условию: $h(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Любой гомоморфизм сохраняет порядок: $a \leq b \Rightarrow h(a) \leq h(b)$.

Пусть J – идеал в б.а Y. Тогда прообраз $h^{-1}(J) = \{a \in X : h(a) \in J\}$

является идеалом в б.а X. В частности, *ядро* гомоморфизма $\mathrm{Ker}\, h = h^{-1}(0)$ является идеалом.

Примером гомоморфизма является отображение $x \mapsto \tilde{x}$ между б.а X и фактор-алгеброй X/I, где I – идеал в X. Другим примером гомоморфизма является оператор проектирования h_s из прямой суммы $X = \prod\limits_{t\in T} X_t \to X_s$, задаваемый формулой $h_s((x_t)) = x_s$.

Пусть C – множество образующих б.а X, $a(C) = X$. Мы хотим выяснить при каких условиях отображение $f : C \to Y$ можно продолжить до гомоморфизма $h : X \to Y$, такого, что $h(a) = f(a)$ $(a \in C)$.

Введем обозначение: для σ принимающего два значения $\{','' \}$ положим $a^\sigma = a'$, если $\sigma =' $ и $a^\sigma = a$, если $\sigma ='' $. Оператор $^{\sigma})$ называется оператором *расстановки дополнений.* Тогда каждый элемент $z \in a(C)$ запишется в виде

$$z = \bigvee_{i=1}^{s} (\bigwedge_{j=1}^{r_i} c_{i,j}^{\sigma(i,j)}), \tag{6}$$

где $c_{i,j} \in C,\ \sigma(i,j) \in \{','' \},\ \ s, r_i \in \mathbf{N}$ (см. 11.3).

12.2. Теорема. *Пусть X, Y – б.а и $a(C) = X$. Отображение $f : C \to Y$ можно продолжить до гомоморфизма $h : X \to Y$ тогда и только тогда, когда*

$$\bigwedge_{c\in C_1} c^{\sigma(c)} = 0 \Rightarrow \bigwedge_{c\in C_1} f(c)^{\sigma(c)} = 0 \tag{7}$$

для любого конечного подмножества $C_1 \subset C$ и любых расстановок дополнений $\sigma(c)$, $c \in C_1$.

Доказательство. Необходимость. Если h гомоморфизм, продолжающий f, то $0 = h(0) = \bigwedge\limits_{c\in C_1} h(c^{\sigma(c)}) = \bigwedge\limits_{c\in C_1} h(c)^{\sigma(c)} = \bigwedge\limits_{c\in C_1} f(c)^{\sigma(c)}$.

Достаточность. Сначала мы должны убедиться, что условие (7) обеспечивает выполнение следующих утверждений:

i) если $a, a' \in C$, то $f(a') = f(a)'$;

ii) если $a, b, a \vee b \in C$, то $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$;

iii) если $a, b, a \wedge b \in C$, то $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Действительно, из $a \wedge a' = 0$ в силу (7) следует $f(a) \wedge f(a') = 0$. Из $a' \wedge (a')' = 0$ следует $f(a)' \wedge f(a')' = 0$ или $f(a) \vee f(a') = 1$. В силу единственности дополнения в ба $f(a') = f(a)'$.

Для доказательства ii) заметим сначала, что если $x, y \in C$ и $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$. Действительно, $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y' = 0$. Поэтому условие (7) влечет $f(x) \wedge f(y)' = 0$, что равносильно $f(x) \leq f(y)$. Учитывая это и $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$ получаем $f(a) \vee f(b) \leq f(a \vee b)$. Поскольку $a' \wedge b' \wedge (a \vee b) = 0$, то в силу (7) $f(a)' \wedge f(b)' \wedge f(a \vee b) = 0$ или $[f(a) \vee f(b)]' \wedge f(a \vee b) = 0$. Это равносильно $f(a) \vee f(b) \geq f(a \vee b)$.

Как и в ii) получим $f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$. Так как $a \wedge b \wedge (a \wedge b)' = 0$, то в силу (7) $f(a) \wedge f(b) \wedge f(a \wedge b)' = 0$. Последнее равенство равносильно $f(a \wedge b) \geq f(a) \wedge f(b)$, что доказывает iii).

Для $z \in a(C)$, имеющего вид (6), определим отображение

$$h(z) = \bigvee_{i=1}^{s} (\bigwedge_{j=1}^{r_i} f(c_{i,j})^{\sigma(i,j)}) \tag{8}$$

Проверим корректность так определенного отображения h. Пусть наряду с (6) элемент z имеет еще одно представление

$$z = \bigvee_{k=1}^{p} (\bigwedge_{n=1}^{q_k} d_{k,n}^{\sigma(k,n)}) \quad \text{и} \quad h_1(z) = \bigvee_{k=1}^{p} (\bigwedge_{n=1}^{q_k} f(d_{k,n})^{\sigma(k,n)})$$

Тогда $0 = z \wedge z' = (\bigvee_{k=1}^{p} (\bigwedge_{n=1}^{q_k} d_{k,n}^{\sigma(k,n)})) \bigwedge (\bigvee_{j_1=1}^{r_1} \bigvee_{j_2=1}^{r_2} \ldots \bigvee_{j_s=1}^{r_s} (c_{1,j_1}^{\prime\sigma(1,j_1)} \wedge c_{2,j_2}^{\prime\sigma(2,j_2)} \ldots \wedge c_{s,j_s}^{\prime\sigma(s,j_s)})$. В силу дистрибутивности получим $\bigwedge_{n=1}^{q_k} d_{k,n}^{\sigma(k,n)} \wedge c_{1,j_1}^{\prime\sigma(1,j_1)} \wedge c_{2,j_2}^{\prime\sigma(2,j_2)} \ldots \wedge c_{s,j_s}^{\prime\sigma(s,j_s)} = 0$. Тогда по условию (7) получим $\bigwedge_{n=1}^{q_k} f(d_{k,n})^{\sigma(k,n)} \wedge f(c_{1,j_1})^{\prime\sigma(1,j_1)} \wedge f(c_{2,j_2})^{\prime\sigma(2,j_2)} \ldots \wedge f(c_{s,j_s})^{\prime\sigma(s,j_s)} = 0$. Но тогда $h_1(z) \wedge h(z)' = 0$, что равносильно $h_1(z) \leq h(z)$. Аналогично, $h(z) \leq h_1(z)$. Нетрудно проверить, что h является гомоморфизмом. Единственность продолжения следует из того, что любой гомоморфизм, продолжающий f, задается по формуле (8). Теорема доказана. $\square$

12.3. Следствие. *Пусть* $X = a(C), Y = a(D)$ *– две булевы алгебры с* *образующими* C *и* D. *Биекцию* $f : C \to D$ *можно продолжить до изоморфизма булевых алгебр* X *и* Y *тогда и только тогда, когда*

$$\bigwedge_{c \in C_1} c^{\sigma(c)} = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{c \in C_1} f(c)^{\sigma(c)} = 0$$

для любого конечного подмножества $C_1 \subset C$ *и любых расстановок дополнений* $\sigma(c)$, $c \in C_1$.

12.4. Предложение. *Пусть* $X_t, t \in T$ *–семейство подалгебр булевой алгебры* X *такое, что* $a(\bigcup_{t \in T} X_t) = X$. *Пусть* Y *– булева алгебра и* $h_t : X_t \to Y$ *– гомоморфизм для каждого* $t \in T$. *Тогда для существования гомоморфизма* $h : X \to Y$, *являющегося общим продолжением семейства* $\{h_t : t \in T\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigwedge_{t \in T_1} a_t = 0 \Rightarrow \bigwedge_{t \in T_1} h_t(a_t) = 0$$

для любого конечного подмножества $T_1 \subset T$ *и любых элементов* $a_t \in X_t$, $t \in T_1$.

Доказательство. Необходимость. Если $h : X \to Y$ – гомоморфизм такой, что $h(a) = h_t(a)$ для любого $a \in X_t$, то $0 = h(\bigwedge_{t \in T_1} a_t) = \bigwedge_{t \in T_1} h(a_t) = \bigwedge_{t \in T_1} h_t(a_t)$.

Достаточность. Если $a \in X_t \cap X_s, (t \neq s)$, то $a \wedge a' = 0$ влечет $h_t(a) \wedge h_s(a)' = 0$ и $h_t(a)' \wedge h_s(a) = 0$. Следовательно, $h_t(a) = h_s(a)$. Значит отображение $f : \bigcup_{t \in T} X_t \to Y$, $f(a) = h_t(a)$ для $a \in X_t$ определено корректно. По теореме 12.2 отображение f можно продолжить до гомоморфизма на X.$\Box$

12.5. Семейство подалгебр $\{X_t : t \in T\}$ б.а X называется *независимым*, если $\bigwedge_{t \in T_1} a_t \neq 0$ для любого конечного подмножества $T_1 \subset T$ и любых ненулевых $a_t \in X_t$, $t \in T_1$.

Пусть $s, t \in T$ и $s \neq t$. Тогда из независимости следует, что 1) $X_t \cap X_s = \{0, 1\}$; 2) $\forall a \in X_t \forall b \in X_s (a \leq b \Leftrightarrow a = 0$ или $b = 1)$.

Действительно, если $a \in X_t \cap X_s$ и $0 < a < 1$, то $a' \in X_t \cap X_s, 0 < a' < 1$. Так как $a \wedge a' = 0$, то получаем противоречие с независимостью. Аналогично, условие $a \leq b$ равносильно $a \wedge b' = 0$. Следовательно, один из элементов a или b' равен 0.

Приведем пример независимого семейства подалгебр. Пусть $\mathcal{A}_t$ является алгеброй подмножеств в множестве Ω_t для каждого индекса $t \in T$. *Цилиндрическим* множеством в декартовом произведении $\Omega = \prod_{t\in T} \Omega_t$ называется множество вида $C_s(A) = \{(\omega_t) \in \Omega : \omega_s \in A\}$, где $A \in \mathcal{A}_s$ и $s \in T$. Ясно, что семейство $\mathcal{A}_s^* = \{C_s(A) : A \in \mathcal{A}_s\}$ является алгеброй множеств в Ω. Алгебра $\mathcal{A} = a(\bigcup_{s\in T} \mathcal{A}_s^*)$ называется *алгеброй цилиндрических множеств* в Ω.

Семейство подалгебр $\{\mathcal{A}_s^* : s \in T\}$ алгебры $\mathcal{A}$ является независимым. Действительно, пусть цилиндрические множества $C_{s_1}(A_1), ..., C_{s_n}(A_n)$ не пусты. Тогда не пустыми будут также множества $A_1, ..., A_n$. Рассмотрим вектор $\omega = (\omega_t)$ у которого $\omega_{s_1} \in A_1, ..., \omega_{s_n} \in A_n$. Тогда $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} C_{s_i}(A_i)$.

12.6. Предложение. *Пусть $\{X_t : t \in T\}$ – независимое семейство подалгебр булевой алгебры X и $h_t : X_t \to Y$ – гомоморфизм в булеву алгебру Y для каждого $t \in T$. Тогда существует их общее продолжение до гомоморфизма $h : a(\bigcup_{t\in T} X_t) \to Y$ такого, что $h(a) = h_t(a)$ для любого $a \in X_t$ и любого $t \in T$.*

Доказательство. Если $a_i \in X_{t_i}, t_i \neq t_j$ $(i = 1, ..., n)$ и $a_1 \wedge ... \wedge a_n = 0$, то в силу независимости найдется индекс $j \in \{1, 2, ..., n\}$ такой, что $a_j = 0$. Тогда $h_{t_j}(a_j) = 0$ и значит $h_{t_1}(a_1) \wedge ... \wedge h_{t_n}(a_n) = 0$. Итак, выполнено условие предложения 12.4 и, следовательно, семейство гомоморфизмов $\{h_t : t \in T\}$ имеет общее продолжение до гомоморфизма из $a(\bigcup_{t\in T} X_t)$ в ба Y.□

12.7. Следствие. *Пусть $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}(t \in T)$ – два независимых семейства подалгебр в булевых алгебрах X и Y соответственно и $h_t : X_t \to Y_t$ – изоморфизм для каждого $t \in T$. Тогда существует их общее продолжение до изоморфизма $h : a(\bigcup_{t\in T} X_t) \to a(\bigcup_{t\in T} Y_t)$.*

12.8. Пусть $X_t : t \in T$ – семейство невырожденных б.а. *Булевым произведением* б.а X_t называется пара $(X, \{h_t : t \in T\})$, где

1) X – б.а, $h_t : X_t \to X$ есть инъективный гомоморфизм для каждого $t \in T$; 2) семейство подалгебр $\{h_t(X_t) : t \in T\}$ независимо; 3) $a(\bigcup\limits_{t\in T} h_t(X_t)) = X$.

В силу следствия 12.7 булево произведение определяется булевыми алгебрами X_t с точностью до изоморфизма. Примером булевого произведения является алгебра цилиндрических множеств, рассмотренная в 12.5.

Булево произведение любого семейства б.а $\{X_t : t \in T\}$ всегда существует. Действительно, пусть Q_t – стоуновское пространство б.а X_t и $\varphi_t : X_t \to CO(Q_t)$ – соответствующий изоморфизм. Пусть X – алгебра цилиндрических множеств, порожденная семейством алгебр открыто-замкнутых множеств $\{CO(Q_t) : t \in T\}$ в декартовом произведении $Q = \prod\limits_{t\in T} Q_t$. Зададим гомоморфизм $h_t(a) = C_t(\varphi_t(a)) : X_t \to CO(Q_t)^*$. Тогда $(X, \{h_t : t \in T\})$ является булевым произведением алгебр X_t.

Так как все пространства Q_t компактны и вполне не связны, то по тереме Тихонова Q также компактно и вполне не связно. Следовательно, Q является пространством Стоуна булевого произведения X.

§13. Принцип исчерпывания. Наследственное ядро

13.1. Пусть X – б.а, $E \subset X$ и K – компонента в X. Скажем, что E *минорантно* (соотв. *мажорантно*) в K, если $\forall x \in K\backslash\{0\}\exists y \in E(0 < y \leq x)$ (соотв. $\forall x \in K\backslash\{1\}\exists y \in E(x \leq y < 1)$).

13.2. Теорема. *Пусть X полная булева алгебра, $M \subset X\backslash\{\emptyset\}$, а E минорантно в $X_{\sup M}$. Тогда существует дизъюнктное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что*

$$1)\ \sup E_1 = \sup M; \quad 2)\ \forall x \in E_1 \exists y \in M(x \leq y).$$

Доказательство. Множество

$$\mathcal{D} = \{F : F \subseteq E, F-\text{дизъюнктно}, \forall\, x \in F \,\exists\, y \in M\, (x \leq y)\}$$

не пусто, так как в силу определения 13.1 существуют одноэлементные подмножества F из $\mathcal{D}$. Упорядочим $\mathcal{D}$ по включению. Рассмотрим цепь $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ и положим $\tilde{F} = \cup\{F : F \in \mathcal{C}\}$. Тогда $\tilde{F} \in \mathcal{D}$ и, следовательно, цепь $\mathcal{C}$ ограничена сверху. По лемме Цорна существует максимальный элемент $E_1 \in \mathcal{D}$. Для E_1 выполнено условие 2); из него же следует, что $\sup E_1 \le \sup M$. Допустим, что $\sup E_1 < \sup M$. Тогда, используя задачу 26°, имеем $\sup M \wedge (\sup E_1)' > 0$. В силу (D3) $\sup[M \wedge (\sup E_1)'] > 0$. Поэтому найдется $y \in M$ такой, что $y \wedge (\sup E_1)' > 0$. Так как $M \subset M^{dd} = X_{\sup M}$ и $X_{\sup M}$ идеал, то $y \wedge (\sup E_1)' \in X_{\sup M}$. В силу минорантности E в $X_{\sup M}$ найдется $x \in E$ такой, что $0 < x \le y \wedge (\sup E_1)'$. Тогда x дизъюнктно E_1 и $x \le y$, $y \in M$. Поэтому множество $\tilde{E} = E \cup \{x\} \in \mathcal{D}$ и E_1 не максимален. Это противоречие доказывает теорему.$\square$

13.3. Из теоремы 13.2 следует *принцип исчерпывания* для полных б.а: если E минорантно в X_a, то для каждого $y \in X_a$ существует дизъюнктное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что $y = \sup E_1$.

13.4. Б.а X называется булевой алгеброй *счетного типа*, если любое дизъюнктное подмножество X не более, чем счетно. Например, алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω счетного типа тогда и только тогда, когда Ω не более, чем счетно. Следующее предложение показывает, что в полных б.а счетного типа можно обойтись лишь счетными точными границами.

13.5. Предложение. *Пусть X полная булева алгебра счетного типа. Тогда для любого $E \subset X$ существует не более, чем счетное $E_0 \subset E$ такое, что* $\sup E = \sup E_0$, $\inf E = \inf E_0$.

Доказательство. Очевидно, что $X_{\sup E}$ минорантно в $X_{\sup E}$. По теореме 13.2 существует дизъюнктное $\tilde{E}_1 \subset X_{\sup E}$ такое, что $\sup \tilde{E}_1 = \sup E$ и $\forall x \in \tilde{E}_1 \exists y \in E(x \le y)$. Так как множество $\tilde{E}_1$ не более, чем счетно, то выбирая по одному $y \ge x \in \tilde{E}_1$ получаем не более, чем счетное подмножество $E_1 \subset E$. Следовательно, $\sup E = \sup \tilde{E}_1 \le \sup E_1 \le \sup E$. Так как $\inf E = (\sup E')'$, то существует не более, чем счетное $E_2 \subset E'$, $\sup E' =$

$\sup E_2$, $\inf E = (\sup E_2)' = \inf E_2'$ и $E_2' \subset E$. Множество $E_0 = E_1 \cup E_2'$– искомое. $\square$

13.6. Часть E б.а X называется d-*правильной*, если $\sup E_1 \in E$ для любого дизъюнктного $E_1 \subset E$. Например, любой главный идеал X_a является d-правильным множеством.

13.7. Лемма. *Пусть множество F в полной булевой алгебре X d-правильно. Тогда F – идеал $\Leftrightarrow$ F – наследственно. В этом случае F является компонентой.*

Доказательство. Пусть $M \subset F$. В теореме 13.2 возьмем в качестве E саму б.а X. Тогда существует дизъюнктное $M_1 \subset X$ такое, что 1) $\sup M_1 = \sup M$ и 2) $\forall x \in M_1 \exists y \in M (x \le y)$. В частности из 2) в силу наследственности F следует, что $M_1 \subset F$. В силу d-правильности F получим, что $\sup M = \sup M_1 \in F$. Итак, F является идеалом. Теперь возьмем $M = F$; тогда $\sup F \in F$. Следовательно, $F = X_{\sup F}$ есть главный идеал, а значит компонента.$\square$

Пусть $E \subset X$, тогда множество $E \cup \{0\} \neq \emptyset$ содержит наследственные подмножества, например $\{0\}$.

13.8. Лемма. *Среди наследственных подмножеств множества $E \cup \{0\}$ существует наибольшее, а именно $E^h = \{a \in X : X_a \subset E \cup \{0\}\}$.*

Действительно, E^h наследственно: $b \le a \in E^h \Rightarrow X_b \subset X_a \subset E \cup \{0\} \Rightarrow b \in E^h$. Пусть B наследственно и $B \subset E \cup \{0\}$. Если $b \in B$, то в силу наследственности $X_b \subset B \subset E \cup \{0\}$ и поэтому $B \subset E^h$. Заметим, что всегда $0 \in E^h$.

Множество E^h называется *наследственным ядром* множества E.

13.9. Теорема. *Пусть X – полная булева алгебра, $E \subset X$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *E^h дизъюнктно E^{ch};* 2) *E минорантно в E^{chd};* 3) *если E d-правильно, то $E^h = E^{chd}$;* 4) *если E компонента, то $E = E^h, E^d = E^{ch}$.*

Доказательство. 1). Пусть $x \in E^h, y \in E^{ch}$. Так как E^h, E^{ch} наследственны, то $x \wedge y \in E^h \cap E^{ch} \subset (E \cup \{0\}) \cup (E^c \cup \{0\}) = \{0\}$, то есть $x \wedge y = 0$.

2) Докажем, что E^c минорантно в E^{hd}. Пусть $0 < a \in E^{hd}$. Если бы $X_a \subset E \cup \{0\}$, то $a \in E^h$ и значит $a = a \wedge a = 0$, что протворечит $a > 0$. Поэтому $X_a \not\subset E \cup \{0\}$ и существует ненулевой элемент $b \in X_a \backslash (E \cup \{0\}) \subset E^c$, что и требовалось.

3) Пусть E d-правильно. По 2) E минорантно в E^{chd}. Так как E^{chd} – идеал, то $\forall a \in E^{chd}(X_a \subset E^{chd})$. Следовательно, E минорантно в X_a. По принципу исчерпывания существует дизъюнктное $E_1 \subset E$ такое, что $a = \sup E_1$. Так как E d-правильно, то $a \in E$. Итак, установлено $E^{chd} \subset E$. Далее E^{chd}, являясь идеалом, наследственно и значит $E^{chd} \subset E^h$. Из 1) E^h дизъюнктно E^{ch}, значит $E^h \subset E^{chd}$.

4) Пусть E – компонента. Тогда E – идеал, $0 \in E$. Если $a \in E$, то $X_a \subset E = E \cup \{0\}$. Поэтому $a \in E^h$ и $E \subset E^h$. Обратно, если $b \in E^h$, то $X_b \subset E \cup \{0\} = E$ и $b \in X_b \subset E$. Итак, $E = E^h$.

Теперь установим, что множество E^c d-правильно. Так как $E = X_e$, где $e = \sup E$, то $b_i \in E^c (i \in J)$ означает, что $b_i \not\leq e$ для всех $i \in J$. Тогда $\bigvee\limits_{i \in J} b_i \not\leq e$, то есть $\bigvee\limits_{i \in J} b_i \in E^c$. По доказанному 3) $E^{ch} = E^{hd} = E^d$. $\square$

13.10. Следствие. *Пусть X – полная булева алгебра, $E \backslash \{0\} \neq \emptyset$ и множество E^c является d-правильным. Тогда $E^h \backslash \{0\} \neq \emptyset$.*

Действительно, по 3) теоремы 13.9 $E^{ch} = E^{hd}$. Пусть $0 < a \in E$. Тогда $a \notin E^c \cup \{0\}$, а значит $X_a \not\subset E^c \cup \{0\}$ и $a \notin E^{ch}$. Поэтому $X \neq E^{ch} = E^{hd}$ и, следовательно, $E^h \neq \{0\}$. $\square$

13.11. Приведем модификацию теоремы 13.2 для произвольных б.а (доказывается также с использованием леммы Цорна).

Пусть X – б.а и $\emptyset \neq M \subset X$, X_M – компонента, порожденная множеством M. Если E минорантно в X_M, то существует дизъюнктное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что

$$1)\ E_1^s = M^s; \quad 2)\ \forall x \in E_1 \exists y \in M (x \leq y).$$

38°. Пусть X б.а и $\emptyset \neq M \subset X$ такое, что $\sup M \in X$. Показать, что найдется дизъюнктное $E \subset X$ такое, что $\sup E = \sup M$ и $\forall x \in E \exists y \in M (x \leq y)$.
39°. Показать, что булева алгебра полна тогда и только тогда, когда всякое дизъюнктное подмножество в ней имеет точную верхнюю границу.
40°. Показать, что σ-полная б.а счетного типа является полной.

§14. Дискретные и непрерывные булевы алгебры

14.1. Б.а X называется *дискретной* (или *атомной*), если существует дизъюнктное множество A, минорантное в X. Множество A в этом случае является множеством всех атомов X. Действительно, если $a \in A$ и существует $0 < x \leq a$, то в силу минорантности A найдется $a_1 \in A$ такое, что $0 < a_1 \leq x$. Но тогда $a_1 = a_1 \wedge a_1 \leq a_1 \wedge a = 0$. Противоречие. Если же b – атом X, то опять в силу минорантности A найдется $a \in A$ такое, что $0 < a \leq b$. Но тогда $b = a$ в силу того, что b атом и значит $b \in A$. Далее через $A(X)$ будем обозначать множество всех атомов б.а X.

14.2. Предложение. *Эквивалентны утверждения:*
1) $a \in A(X)$; 2) $\forall b \in X (a \leq b$ *или* $a \wedge b = 0)$; 3) *главный идеал* $I_{a'}$ *максимален.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$ 2). Неравенство $a \wedge b \leq a$ влечет в силу того, что a атом $a \wedge b = 0$ или $a \wedge b = a$. Последнее равенство равносильно $a \leq b$. 2)$\Rightarrow$ 3). Пусть $b \in X$. Если $a \leq b$, то $b' \leq a'$ и значит $b' \in I_{a'}$. Условие $a \wedge b = 0$ равносильно условию $b \leq a'$ и поэтому $b \in I_{a'}$. По теореме 4.4 идеал $I_{a'}$ максимален. 3)$\Rightarrow$ 1). Пусть $b \leq a$. По теореме 7.4 либо $b \in I_{a'}$ и тогда $b = b \wedge b \leq a \wedge a' = 0$, либо $b' \in I_{a'}$, что дает $b \geq a$, $b = a$. Значит $a \in A(X)$. $\square$

14.3. Предложение. *Пусть* $\varphi : X \to CO(Q)$ *– стоуновский изоморфизм булевой алгебры* X. *Тогда* $a \in A(X) \Leftrightarrow \operatorname{card} \varphi(a) = 1$. *При этом* $\varphi(a) =$

$\{I_{a'}\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть Q– множество всех максимальных идеалов в X. По определению стоуновского изоморфизма $\varphi(a) = \{q \in Q : q \ni a'\}$. Пусть $q_1, q_2 \in \varphi(a)$. Если существует $a_1 \in q_1 \backslash q_2$, то в силу максимальности идеалов $a_1' \in q_2 \backslash q_1$ и значит $q_2 \in \varphi(a_1)$. Поэтому $q_2 \in \varphi(a_1) \cap \varphi(a) = \varphi(a_1 \wedge a)$, что означает $\varphi(a_1 \wedge a) \neq \emptyset$, $0 < a_1 \wedge a \leq a$. Это противоречит тому, что a – атом. Следовательно, $q_1 \backslash q_2 = \emptyset$. Аналогично $q_2 \backslash q_1 = \emptyset$, и $q_1 = q_2$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{card} \varphi(a) = 1$. Если существует $0 < b \leq a$, то $\emptyset \neq \varphi(b) \subseteq \varphi(a)$. В силу одноточечности $\varphi(a)$ имеем $\varphi(b) = \varphi(a)$ и, следовательно, $b = a$. Значит a – атом.

По предложению 14.2 идеал $I_{a'}$ максимален, а так как $I_{a'} \ni a'$, то $I_{a'} \in \varphi(a)$. Следовательно, $\varphi(a) = \{I_{a'}\}$. $\square$

Таким образом, атомам в б.а X соответствуют изолированные точки компакта Q и обратно.

14.4. Теорема. *Пусть X – атомная булева алгебра и $A = A(X)$. Тогда $h(x) = \{a \in A : a \leq x\}$ является инъективным гомоморфизмом булевой алгебры X в булеву алгебру $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A. Если X является d-правильной атомной булевой алгеброй, то*

i) *h является изоморфизмом,* ii) *$x = \sup h(x)$ для любого $x \in X$,*

iii) *X является полной.*

Доказательство. Так как $a \leq x \leq x \vee y$, то $h(x \vee y) \supseteq h(x) \cup h(y)$. Пусть атом $a \leq x \vee y$. Тогда из $a \wedge x \leq a$ (в силу атомности a) следует либо $a \wedge x = 0$, либо $a \wedge x = a$. Первый случай равносилен $a \leq x'$, что вместе с неравенством $a \leq x \vee y$ дает $a \leq x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge y \leq y$, $a \in h(y)$. Второй случай равносилен $a \leq x$ и значит $a \in h(x)$. Таким образом, показано, что $h(x \vee y) \subseteq h(x) \cup h(y)$, а вместе с тем, что h сохраняет операцию $\vee$.

Теперь покажем, что $h(x') = h(x)^c$. Действительно, если $a \in h(x')$, то атом $a \notin h(x)$ иначе $a = a \wedge a \leq x \wedge x' = 0$, что противоречит $a > 0$. Итак, $h(x') \subseteq h(x)^c$. Обратно, условие $a \in h(x)^c \Leftrightarrow a \not\leq x$ равносильно $a \wedge x' > 0$, а в силу атомности a тогда $a \wedge x' = a$. Это означает, что $a \leq x'$ $a \in h(x')$. Итак, h – гомоморфизм.

Если $x \neq y$, то либо $x \wedge y' \neq 0$, либо $x' \wedge y \neq 0$. Если, например, $x \wedge y' \neq 0$, то существует атом $0 < a \leq x \wedge y'$, $a \in h(x \wedge y') = h(x) \backslash h(y)$, то есть $h(x) \neq h(y)$. Значит h инъективно.

i) Пусть теперь X – d-правильная атомная б.а, $\subset A$. Так как множество B дизъюнктно, то существует $x = \sup B \in X$. Покажем, что $h(x) = B$. Действительно, если атом $a \in B$, то $a \leq \sup B$, то есть $B \subseteq h(x)$. Если атом $a \in h(x) \backslash B$, то $a \leq \sup B$ влечет $a = a \wedge \sup B = \sup(a \wedge B) = 0$ в силу D3 (теорема 6.6) и дизъюнктности различных атомов. Но это противоречит $a > 0$. Итак, $h(x) = B$, отображение h сюрьективно. Учитывая первую часть теоремы заключаем, что h – изоморфизм.

ii) Пусть $x \in X$. Так как $h(x)$ дизъюнктно, то существует $z = \sup h(x) \in X$. Так как $a \leq x$ для любого $a \in h(x)$, то $z \leq x$. Если в разложении $x = z \vee (x \wedge z')$ элемент $x \wedge z' > 0$, то в силу атомности ба X найдется атом $0 < a_1 \leq x \wedge z'$. Заметим, что $a_1 \in h(x)$. Далее из $a_1 = a_1 \wedge x \wedge z' = a_1 \wedge z'$ следует, что $a_1 \leq z'$ и $a_1 = a_1 \wedge z' = a_1 \wedge \inf\{a' : a \in h(x)\} = 0$, так как среди элементов $h(x)$ есть также и a_1. Это противоречит $a_1 > 0$, значит $z = x$.

iii) Пусть дано семейство $\{x_i \in X : i \in J\}$. Тогда $F = \bigcup\limits_{i \in J} h(x_i) \subset A$ и потому дизъюнктно. По ii) $x_i = \sup h(x_i)$ и учитывая ассоциативность точных граней $\bigvee\limits_{\in J} x_i = \bigvee\limits_{i \in J} \sup h(x_i) = \sup F \in X$ (см. 1.7 пункт d)). Теорема доказана.

Итак, в классе атомных б.а полнота и d-правильность совпадают.

14.5. Следствие. *Полные атомные булевы алгебры X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда $A(X)$ и $A(Y)$ равномощны.*

Действительно, если $f : A(X) \to A(Y)$ – биекция, то $\psi(x) = \sup f(h(x)) : X \to Y$, где $f(h(x))$ – образ множества $h(x)$ является изоморфизмом. Обратно, если $\psi : X \to Y$ – изоморфизм, то ψ и ψ^{-1} переводят атомы в атомы инъективно. Значит $A(X)$ равномощно $\psi(A(X)) \subset A(Y)$ и $A(Y)$ равномощно $\psi^{-1}(A(Y)) \subset A(X)$. По теореме Бернштейна $A(X)$ равномощно

$(A(Y)$.

14.6. Булева алгебра без атомов называется *непрерывной*. Например, б.а $CO(\mathcal{C})$ всех открыто-замкнутых подмножеств канторовского множества $\mathcal{C}$ является непрерывной, так как компакт $\mathcal{C}$ является пространством Стоуна для $CO(\mathcal{C})$ и не содержит изолированных точек (см. 10.9 и 14.3).

14.7. Теорема. *Пусть X – полная булева алгебра. Тогда существуют единственные главные идеалы X_u и $X_{u'}$ такие, что* 1) $X = X_u \bigoplus X_{u'}$, 2) X_u *– атомный идеал,* $X_{u'}$ *– непрерывный идеал.*

Доказательство. Если $A(X) = \emptyset$, то положим $u = 0$. Пусть $A = A(X) \neq \emptyset$. По теореме 13.9 множество A минорантно в компоненте A^{chd}. В силу полноты б.а X существует $u = \sup A^{chd}$ и $A^{chd} = X_u$. Тогда по определению главный идеал X_u (рассматриваемый здесь как б.а) атомный.

Далее покажем, что $A^h = A \cup \{0\}$. По определению наследственного ядра $A^h = \{b \in X : X_b \subset A \cup \{0\}\}$ и так как $b \in X_b$, то $A^h \subset A \cup \{0\}$. С другой стороны, если атом $b \in A$, то $X_b = \{0, b\} \subset A \cup \{0\}$ и значит $b \in A^h$. Итак, $A \cup \{0\} \subset A^h$ и равенство доказано.

По теореме 13.9 пункт 1) $A^{chd} \supset A^h$, а по доказанному $A^h \supset A$. Итак, $A \subset X_u$. Тогда $A \not\subset X_{u'}$ (если $a \in A$ одновременно лежит в X_u и $X_{u'}$, то $a = a \wedge a \leq u \wedge u' = 0$ что противоречит $a > 0$). Значит б.а $X_{u'}$ непрерывна. Разложение вида $X = X_u \bigoplus X_{u'}$ справедливо для любого $u \in X$ (см. 11.15).

Единственность. Пусть есть еще одно разложение $X = X_z \bigoplus X_{z'}$, где X_z – атомный, а $X_{z'}$ – непрерывный идеалы. Тогда любой атом $a \in A$ не принадлежит $X_{z'}$, что означает $a \not\leq z'$. Последнее соотношение равносильно $a \wedge z > 0$. Так как a – атом, то $a \wedge z = a$ и значит $a \leq z$. Итак, $A \subset X_z$. Тогда $A^c \supset X_z^c, A^{ch} \supset X_z^{ch}, X_u = A^{chd} \subset X_z^{chd}$. Так как множество X_z d-правильно, то по теореме 13.9 пункт 3) $X_z^{chd} = X_z^h = X_z$. Итак, $X_u \subset X_z, u \leq z$. Поменяв ролями u и z, получим $z \leq u$. Таким образом, $u = z$.□

§15. Автоморфизмы в булевой алгебре

15.1. *Автоморфизмом* б.а X называется биекция $A : X \to X$, сохраняющая порядок или (что равносильно) сохраняющая все алгебраические операции. Множество всех автоморфизмов образует группу, которая будет обозначаться $AutX$. Приведем некоторые свойства автоморфизмов.

15.2. Предложение. *Пусть X – булева алгебра, $Y \subset X, A \in AutX$. Тогда:*

1) $A(0) = 0, A(1) = 1,\ A(\sup Y) = \sup A(Y),\ A(\inf Y) = \inf A(Y)$;

2) Y *– дизъюнктно* $\Leftrightarrow A(Y)$ *– дизъюнктно*;

3) $A(Y^d) = [A(Y)]^d,\ \ Y$ *– компонента* $\Leftrightarrow A(Y)$ *– компонента*;

4) $A(X_b) = X_{Ab},\ \ b$ *–атом* $\Leftrightarrow Ab$ *– атом*;

5) I *– идеал* $\Leftrightarrow A(I)$ *– идеал*;

6) I *– максимальный идеал* $\Leftrightarrow A(I)$ *– максимальный идеал.*

Доказательство. 1) $A(0) = A(x \wedge x') = Ax \wedge (Ax)' = 0,\ A(1) = A(x \vee x') = Ax \vee (Ax)' = 1$. Остальное следует из 1.8 пункт ii).

3) Пусть $z \in Y^d$. Тогда $z \wedge y = 0$ для любого $y \in Y$. Следовательно, $Az \wedge Ay = 0,\ Az \in [A(Y)]^d$ и значит $A(Y^d) \subset [A(Y)]^d$. Обратно, $x \in [A(Y)]^d$ означает, что $x \wedge Ay = 0$ для любого $y \in Y$. Тогда $A^{-1}x \wedge y = 0, A^{-1}x \in Y^d$ и $x = A(A^{-1}x) \in A(Y^d)$. Итак, $[A(Y)]^d \subset A(Y^d)$.

4) Если $u \leq b$, то $Au \leq Ab$ и значит $A(X_b) \subset X_{Ab}$. Если $z \in X_{Ab}$, то $z \leq Ab, A^{-1}z \leq b$ и значит $z = A(A^{-1}z) \in A(X_b)$. Если a – атом, то $X_a = \{0, a\}$ и в силу доказанного $A(X_a) = \{0, Aa\} = X_{Aa}$.

5) Если $z \leq Ax$, где $x \in I$, то $A^{-1}z \leq x$ и значит $A^{-1}z \in I$. Поэтому $z = A(A^{-1}z) \in A(I)$. Если же $Ax, Ay \in A(I)$, где $x, y \in I$, то $x \vee y \in I$ и $Ax \vee Ay = A(x \vee y) \in A(I)$.

6) Если существует собственный идеал $J \supset A(I)$, то $I \subset A^{-1}(J)$, что противоречит максимальности идеала I.$\Box$

15.3. Теорема. *Группа* $AutX$ *булевой алгебры* X *изоморфна группе* $H(Q)$ *всех гомеоморфизмов стоуновского компакта* Q *в себя.*

Доказательство. Заметим, что если $f : Q \to Q$ биекция, то прообраз $f^{-1}[A] \equiv \{q \in Q : f(q) \in A\}$ множества A совпадает с образом $f^{-1}(A) \equiv \{f^{-1}(a) : a \in A\}$ при обратном отображении f^{-1}. Поэтому если f – гомеоморфизм, а множество U открыто-замкнуто, то $f(U)$ также открыто-замкнуто.

Пусть $\varphi : X \to CO(Q)$ –стоуновский изоморфизм, $x \in X, f \in H(Q)$. Так как множество $f(\varphi(x))$ открыто-замкнуто, то существует единственный элемент $A_f x \in X$ такой, что $f(\varphi(x)) = \varphi(A_f x)$. Тогда $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b) \Leftrightarrow f(\varphi(a)) \subseteq f(\varphi(b)) \Leftrightarrow \varphi(A_f a) \subseteq \varphi(A_f b) \Leftrightarrow A_f a \leq A_f b$. В частности, отсюда следует инъективность отображения A_f. Пусть $x \in X$, положим $y = A_{f^{-1}} x$. Тогда $\varphi(A_f y) = f(\varphi(y)) = f(\varphi(A_{f^{-1}} x)) = f(f^{-1}(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Следовательно, $x = A_f(y)$ и A_f является сюрьекцией. Итак, $A_f \in AutX$.

Пусть теперь $A \in AutX$. В силу 6) предложения 15.2 образ $A(q) \in Q$ при любом $q \in Q$. Определим отображение $f_A(q) \ = A(q) = \{Ax : x \in q\}$ и покажем, что $f_A \in H(Q)$.

Если $q_1 \neq q_2$, то $\exists x \in q_1 \backslash q_2$, что равносильно $Ax \in A(q_1) \backslash A(q_2)$. Значит $f_A(q_1) \neq f_A(q_2)$. Если $q \in Q$, то для $q_1 = A^{-1}(q)$ имеем $f_A(q_1) = A(A^{-1}(q)) = q$. Итак, отображение f_A– биекция.

Покажем, что прообраз $f_A^{-1}(\mathcal{M}(I))$ замкнут для любого идеала I в ба X. Действительно, множество $f_A^{-1}(\mathcal{M}(I)) = \{q \in Q : f_A(q) \in \mathcal{M}(I)\} = \{q \in Q : A(q) \supseteq I\} = \{q \in Q : q \supseteq A^{-1}(I)\} = \mathcal{M}(A^{-1}(I))$ замкнуто, поскольку $A^{-1}(I)$ является идеалом в силу 5) предложения 15.2. Так как обратное отображение f_A^{-1} определяется обратным автоморфизмом A^{-1}, а именно $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$, то f_A есть гомеоморфизм, $f_A \in H(Q)$.

Теперь покажем, что $A_{f_A} = A$, $f_{A_f} = f$. Это будет означать, что отображения $f \mapsto A_f$ и $A \mapsto f_A$ взаимно обратны. Действительно, по определению элемент $A_{f_A} x$ таков, что образ $f_A(\varphi(x)) = \varphi(A_{f_A} x)$. Для этого образа имеем $f_A(\varphi(x)) = \{f_A(q) : q \in \varphi(x)\} = \{A(q) : x' \in q\} = \{A(q) :$

$Ax' \in A(q)\} = \{A(q) : (Ax)' \in A(q)\} \subset \{q : (Ax)' \in q\} = \varphi(Ax)$. Итак, $\varphi(A_{f_A}x) \subset \varphi(Ax)$, $A_{f_A}x \leq Ax$ для любого $x \in X$. Поскольку A и A_{f_A}, то из неравенства $(A_{f_A}x)' \geq (Ax)'$ следует $A_{f_A}(x') \geq A(x')$ и значит $A_{f_A}x \geq Ax$.

Далее равенство $f_{A_f} = f$ означает, что для любого максимального идеала $q \in Q$ образ $A_f(q)$ множества q при автоморфизме A_f совпадает с $f(q)$. Пусть $x \in A_f(q)$. Тогда найдется $y \in q$ такой, что $x = A_f y$. Если $x \notin f(q)$, то $x' \in f(q)$ и значит $f(q) \in \varphi(x) = \varphi(A_f y) = f(\varphi(y))$. Это означает, что существует $q_1 \in \varphi(y)$ такой, что $f(q) = f(q_1)$. Так как f биекция, то $q = q_1 \in \varphi(y)$. Но $y \in q$ означает $q \in \varphi(y')$. Поэтому $q \in \varphi(y) \cap \varphi(y') = \varphi(y \wedge y') = \emptyset$ приводит к противоречию. Итак, $A_f(q) \subseteq f(q)$. В силу 6) предложения 15.2 $A_f(q)$ максимален, а значит $A_f(q) = f(q)$.

Наконец, если $A, B \in AutX$, то $f_{AB}(q) = AB(q) = A(B(q)) = f_A(B(q)) = f_A(f_B)(q)$. Следовательно, $f_{AB} = f_A \circ f_B$ и отображение $A \mapsto f_A$ является изоморфизмом группы $AutX$ на группу $H(Q)$.$\square$

15.4. Подгруппа автоморфизмов $\mathcal{G} \subseteq AutX$ называется *эргодической*, если $\bigvee\limits_{A \in \mathcal{G}} Ax = 1$ для любого ненулевого $x \in X$. Компонента Y называется *$\mathcal{G}$-инвариантной*, если $A(Y) \subset Y$ для любого автоморфизма $A \in \mathcal{G}$.

15.5. Предложение. *Подгруппа $\mathcal{G}$ автоморфизмов булевой алгебры X эргодическая тогда и только тогда, когда единственной $\mathcal{G}$-инвариантной компонентой является X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $Y - \mathcal{G}$-инвариантная компонента. Тогда $A(Y) \subset Y$ и $A(Y)$ является компонентой для любого $A \in \mathcal{G}$. Обозначим $E = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{G}} A(Y)$. Тогда $E^{dd} \subset Y^{dd} = Y$. По условию $\sup E = 1$. По предложению 9.6 получим $Y \supset E^{dd} = X_E = X_1 = X$.

Достаточность. Пусть $x \in X \setminus \{0\}$. Положим $E = \{Ax : A \in \mathcal{G}\}$. Тогда компонента E^{dd} является $\mathcal{G}$-инвариантной. Действительно, если $A \in \mathcal{G}$, то $A(E) \subset E$ и $A(E^{dd}) = [A(E)]^{dd} \subset E^{dd}$ в силу предложения 15.2 пункт 3) и того, что двойное дополнение сохраняет включение. По условию $E^{dd} = X = X_1$ или $E^d = X_0$. Тогда $\sup E = 1$ по предложению 9.6. $\square$

15.6. Замечание. Теорема 15.3 позволяет некоторые вопросы теории б.а переводить в область топологических вопросов. Например, вопрос о существовании б.а X с тривиальной группой $AutX$ сводится к отысканию вполне несвязного компакта, не имеющего кроме тождественного других гомеоморфизмов в себя. Такие примеры были построены несколькими авторами в 1951 году.

§16. Аддитивные функции на булевых алгебрах

16.1. Пусть X – б.а. Отображение $\nu : X \to \mathbb{R}$ называется *зарядом*, если оно *аддитивно*:

$$\forall\, x, y \in X\,(x \wedge y = 0 \Rightarrow \nu(x \vee y) = \nu(x) + \nu(y)) \tag{9}$$

Свойство (9) равносильно свойству *конечной аддитивности*: $\nu(\bigvee\limits_{x\in D} x) = \sum\limits_{x\in D} \nu(x)$ для любого конечного дизъюнктного множества $D \subset X$ (доказывается по индукции). Ясно, что $\nu(0) = 0$ для любого заряда ν. Множество всех зарядов на X обозначим через $Z(X)$.

Заряд μ называется *мерой*, если $\mu(x) \geq 0$ для любого $x \in X$. Любая мера μ является неубывающей: $x \leq y \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(y)$ (см. 26°), а также *полуаддитивной*: $\mu(x \vee y) \leq \mu(x) + \mu(y)$ для любых $x, y \in X$. Действительно, в силу аддитивности и неубывания $\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(x' \wedge y) \leq \mu(x) + \mu(y)$. Множество всех мер на X обозначим через $M(X)$. Мера μ называется *точной*, если $\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Мера s называется *состоянием*, если $s(1) = 1$; очевидно, что $s(X) \subseteq [0; 1]$ для любого состояния s. Множество всех состояний на X обозначим через $S(X)$. Состояние s называется *двузначным*, если $s(X) = \{0, 1\}$; множество всех двузначных состояний на X обозначим через $S_2(X)$.

16.2. Напомним, что в декартовом произведении $W = \prod\limits_{s\in S} T_s$ топологических пространств T_s *топологией произведения* τ называется слабейшая топология в W, относительно которой все проектирования $P_t((x_s)) = x_t : W \to T_t$, $(t \in S)$ непрерывны. Пусть в каждом пространстве T_s выделена база топологии $\mathcal{B}_s$. Тогда топология τ задается предбазой $\{U(t) : U \in \mathcal{B}_t, t \in S\}$, состоящей из множеств $U(t) = \prod\limits_{s \in S} U_s$, где $U_t = U$ и $U_s = T_s$ при $s \neq t$.

Нас интересует случай, когда все пространства одинаковы: $T_s = T$ для всех $s \in S$. В этом случае произведение обозначается $\prod\limits_{s \in S} T_s \equiv T^S$ и его элементы можно отождествить с отображениями $x : S \to T$, $(x_s)_{s \in S} = (x(s))_{s \in S}$. Опишем топологию произведения τ в терминах направленностей.

Направленность в топологическом пространстве T называется семейство $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $f_\alpha \in T$, а A – некоторое направление. Говорят, что направленность $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ в пространстве T *сходится к* $f \in T$ $(f_\alpha \to f)$, если

$$\forall\ U(f) \exists\ \alpha_0 \in A\ \forall\ \alpha \in A\ (\alpha \geq \alpha_0\ \Rightarrow\ f_\alpha \in U(f));$$

здесь через $U(f)$ обозначена окрестность точки $f \in T$.

Направленность $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset T^S$ сходится к f в топологии произведения τ тогда и только тогда, когда $f_\alpha(s) \to f(s)$ для каждого $s \in S$ в пространстве T. Таким образом, топология τ это топология *поточечной сходимости.*

16.3. Предложение. *Пусть Q – множество всех максимальных идеалов в булевой алгебре X. Для $a \in X$ и $q \in Q$ положим*

$$q(a) = \begin{cases} 0, & a \in q \\ 1, & a \notin q. \end{cases}$$

Тогда $q(\cdot) \in S_2(X)$ и соответствие $q \mapsto q(\cdot) : Q \to S_2(X)$ биективно. Более того, это отображение является гомеоморфизмом, если наделить Q стоуновской топологией, а $S_2(X)$ – индуцированной топологией из произведения $[0;1]^X$.

Доказательство. Критерием максимальности идеала q является альтернатива: либо $a \in q$, либо $a' \in q$ (см. теорема 7.4). Таким образом, для максимальных идеалов q условие $a' \in q$ равносильно условию $a \notin q$. Следовательно, отображение $q(\cdot)$ определено на всем X и $q(1) = 1$. Проверим его аддитивность.

Пусть $x, y \in X$ и $x \wedge y = 0$. Тогда случай $q(x) = q(y) = 1$ не возможен. Действительно, это означало бы, что $x' \in q, y' \in q$. Но тогда $x' \vee y' \in q$ и в силу теоремы 4.4 $q \not\ni (x' \vee y')' = x \wedge y = 0$. Противоречие.

Пусть $q(x \vee y) = 0$. Тогда $x \vee y \in q$ и значит $x \in q$ и $y \in q$. Поэтому $q(x) = 0 = q(y)$ и (9) выполнено.

Пусть $q(x \vee y) = 1$. Тогда $x \vee y \notin q$ и значит $x' \wedge y' \in q$. Это равносильно $q \supset I_{x' \wedge y'} = I_{x'} \cap I_{y'}$ (см. 29°). В силу следствия 7.5 q содержит один из идеалов $I_{x'}, I_{y'}$. Поэтому либо $x' \in q$ (тогда $y' \notin q$), либо $y' \in q$ (тогда $x' \notin q$). Итак, либо $x \notin q$ и $y \in q$, либо $y \notin q$ и $x \in q$. Это влечет выполнение равенства (9).

Если $q_1, q_2 \in Q$ и $q_1 \neq q_2$, то найдется $x \in q_1 \backslash q_2$. Поэтому $q_1(x) = 0$ и $q_2(x) = 1$ и значит соответствие $q \mapsto q(\cdot)$ инъективно.

Пусть $s \in S_2(X)$. Из неубывания и полуаддитивности s следует, что множество $q_s \equiv \{x \in X : s(x) = 0\}$ является идеалом. В силу же равенства $1 = s(x) + s(x')$ и двузначности s выполнено условие 2) теоремы 7.4 и поэтому идеал q_s максимален. Наконец, $q_s(a) = s(a)$ для любого $a \in X$. Таким образом, соответствие $q \mapsto q(\cdot)$ сюрьективно.

По теореме Тихонова $[0;1]^X$ является отделимым компактом. Покажем, что $S_2(X)$ является замкнутым подмножеством $[0;1]^X$ в топологии произведения τ. Пусть $f_\alpha \in S_2(X)$ $(\alpha \in A)$ и $f_\alpha \to f$. Это означает, что для любого $x \in X$

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \alpha_0 \in A\ \forall\, \alpha \in A\ (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |f_\alpha(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Надо показать, что $f \in S_2(X)$. Так как $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1$, то $0 \leq f(x) \leq 1$ и, следовательно, $|f_\alpha^2(x) - f^2(x)| \leq 2|f_\alpha(x) - f(x)|$. Таким образом, $f_\alpha(x) = f_\alpha^2(x) \to f^2(x)$ и в силу отделимости $f^2(x) = f(x)$. Значит f двузначно.

Пусть $x, y \in X$, $x \wedge y = 0$ и ε произвольное положительное число. Так как A иерархично, то найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что при $\alpha \geq \alpha_0$ одновременно выполняются три неравенства $|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$, $|f_\alpha(y) - f(y)| < \varepsilon$, $|f_\alpha(x \vee y) - f(x \vee y)| < \varepsilon$. Из этих неравенств, учитывая, что $f_\alpha(x \vee y) = f_\alpha(x) + f_\alpha(y)$, получим $f(x)+f(y)-3\varepsilon \le f(x\vee y) \le f(x)+f(y)+3\varepsilon$. Итак, $f \in S_2(X)$.

Так как множество $S_2(X)$ является замкнутым в $[0;1]^X$, то оно компактно и отделимо. По определению топологии произведения τ семейство множеств $x^\sim \equiv \{f \in S_2(X) : f(x)=1\} = \{f \in S_2(X) : f(x')=0\}$, $(x \in X)$ образует предбазу. Нетрудно показать, что $x^{\sim c} = S_2(X)\backslash x^\sim = (x')^\sim$ и $x^\sim \cap y^\sim = (x \wedge y)^\sim$. Это означает, что $\{x^\sim : x \in X\}$ является базой τ, состоящей из открыто-замкнутых множеств. Таким образом, $(S_2(X),\tau)$ – вполне несвязный отделимый компакт и отображение $x \mapsto x^\sim$ является изоморфизмом б.а X на $CO(S_2(X))$. В силу теоремы Стоуна, отображение $q \mapsto q(\cdot) : Q \to S_2(X)$ – гомеоморфизм. □

16.4. Предложение. *Если на булевой алгебре X существует точная мера μ, то X счетного типа.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset X$ дизъюнктно и несчетно. Можно считать, что $0 \notin E$. Рассмотрим множества $E_n = \{x \in E : \mu(x) \ge \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Действительно, $E_n \subset E \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$. Обратно, если $x \in E$, то $\mu(x) > 0$ в силу точности μ. Значит найдется $k \in \mathbf{N}$ такое, что $\mu(x) \ge \frac{1}{k} > 0$ и, следовательно, $x \in E_k \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

В силу несчетности E найдется $k \in \mathbf{N}$ такое, что множество E_k бесконечно. Для этого k найдем $m \in \mathbf{N}$ такое, что $\mu(1) < \frac{m}{k}$. В множестве E_k выберем m точек $\{x_1,...,x_m\} \equiv F$, $F \subset E_k$. Тогда $\mu(1) \ge \mu(\sup F) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(x_i) \ge \frac{m}{k} > \mu(1)$. Противоречие. □

16.5. Замечание. H. Gaifman в 1964 году построил пример б.а счетного типа без точных мер. Следовательно, обратное утверждение к предложению 16.4 в общем случае не верно.

16.6. Заряд $\nu \in Z(X)$ называется *вполне аддитивным*, если $\nu(\sup E) = \sum\limits_{x\in E} \nu(x)$ для любого дизъюнктного $E \subset X$ такого, что $\sup E \in X$.

Напомним, как определяются бесконечные суммы. Пусть J_E – идеал всех конечных подмножеств множества E. Тогда $S = \sum\limits_{x\in E} \nu(x)$ означает

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists E_\varepsilon \in J_E \forall F \in J_E \, (F \supset E_\varepsilon \Rightarrow |S - \sum_{x \in F} \nu(x)| < \varepsilon)$$

Если $\mathcal{G}$ – группа автоморфизмов ба X, то заряд ν называют $\mathcal{G}$-*инвариантным*, если $\nu(Ax) = \nu(x)$ для любого $A \in \mathcal{G}$ и любого $x \in X$.

16.7. Теорема. *Пусть X – полная булева алгебра, $\mathcal{G}$ – эргодическая группа автоморфизмов. Если на X существует вполне аддитивное $\mathcal{G}$-инвариантное состояние, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть ν, μ – пара вполне аддитивных $\mathcal{G}$-инвариантных состояния на X. Тогда множество $E = \{x \in X : \mu(x) > \nu(x)\}$ является d-правильным: если $E_1 \subset E$ дизъюнктно, то $\mu(\sup E_1) = \sum_{x \in E_1} \mu(x) > \sum_{x \in E_1} \nu(x) = \nu(\sup E_1)$; $\sup E_1 \in E$. Аналогично, множество $E^c = \{x \in X : \mu(x) \leq \nu(x)\}$ также d-правильно. По теореме 13.9 пункт 3) $E^h = E^{chd}$, $E^{ch} = E^{hd}$.

Предположим, что компоненты E^h и E^{ch} не нулевые: $0 < u \in E^h$, $0 < v \in E^{ch}$. Так как $\bigvee_{A \in \mathcal{G}} Au = 1$, то в силу дистрибутивности D3 имеем $v = v \wedge 1 = \bigvee_{A \in \mathcal{G}} (v \wedge Au)$. Значит найдется автоморфизм $A \in \mathcal{G}$ такой, что $w \equiv v \wedge Au > 0$. Таким образом, $0 < w \in X_u \subset E^c \cup \{0\}$ (последнее включение из определения наследственного ядра) и $0 < t \equiv A^{-1}w = A^{-1}v \wedge u \leq u$. Следовательно, $0 < t \in X_u \subset E \cup \{0\}$, $t \in E$. В силу инвариантности состояний $0 < \mu(t) - \nu(t) = \mu(w) - \nu(w) \leq 0$. Противоречие. Итак, хотя бы одна из компонент E^h, E^{ch} нулевая. Так как компоненты в полной ба совпадают с главными идеалами, то если $E^h = X_a$, то $E^{ch} = E^{hd} = X_{a'}$ и значит $X = X_a \oplus X_{a'} = E^h \oplus E^{ch}$ (см. 9.2 и 11.15).

Если $X = E^h \subset E \cup \{0\}$, то $X = E \cup \{0\}$ и значит $\mu(x) > \nu(x)$ для любого ненулевого $x \in X$. Но это противоречит равенству $\mu(1) = 1 = \nu(1)$. Таким образом, должно быть $X = E^{ch} \subset E^c \cup \{0\} = E^c$; $E^c = X$. Итак, $\mu(x) \leq \nu(x)$ для любого $x \in X$. Поменяв ролями μ и ν, получим обратное неравенство. $\square$

16.8. Пример. Для б.а $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω. Стоуновским пространством является Ω, наделенное дискретной топологией. Поэтому группа $Aut\mathcal{P}(\Omega)$ изоморфна группе всех биекций множества Ω в себя. Следовательно, $Aut\mathcal{P}(\Omega)$ эргодическая для $\mathcal{P}(\Omega)$. Если μ – мера, инвариантная относительно всех $A \in Aut\mathcal{P}(\Omega)$, то $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2)$ для любых ω_1, ω_2. Поэтому для конечного $x \subset \Omega$ получаем $\mu(x) = \lambda \mathrm{card} x$. Значит для бесконечных множеств Ω таких мер не существует. Для конечных же Ω любая инвариантная мера имеет вид $\mu(x) = \lambda \mathrm{card} x$, а состояние получится при единственном $\lambda = 1/\operatorname{card}\Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория решеток. „Наука“, М., 1984. – 568 с.
2. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. „Наука“, М., 1969. – 320 с.
3. Гретцер Г. Общая теория решеток. „Мир“, М., 1982. – 456 с.
4. Келли Дж. Л. Общая топология. „Наука“, М., 1981.
5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С.С. Введение в булевозначный анализ. „Наука“, М., 2005. – 526 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. „Наука“, М., 1989.
7. Оре О. Теория графов. „Наука“, М., 1980. – 336 с.
8. Салий В. Н. Решётки с единственными дополнениями. „Наука“, М., 1984. – 128 с.
9. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. „Наука“, М., 1982. – 160 с.
10. Сикорский Р. Булевы алгебры. „Мир“, М., 1969. – 376 с.
11. Султанбеков Ф. Ф. Булевы алгебры и квантовые логики. Казань: Изд. Казанского университета, 2007. – 132 с.
12. Шерстнев А. Н. Конспект лекций по математическому анализу. 4-е издание. Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, Казань, 2005. – 374 с.
13. Kalmbach G. Orthomodular Lattices. Academic Press, London, 1983.-390 p.
14. Pt$\acute{a}$k P., Pulmannov$\acute{a}$ S. Orthomodular Structures as Quantum Logics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1991.
15. Gudder S. Stochastic Methods in Quantum Mechanics. Elsevier/ North-Holland, Amsterdam, 1979.